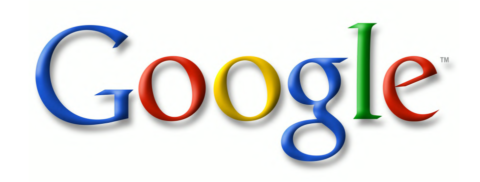
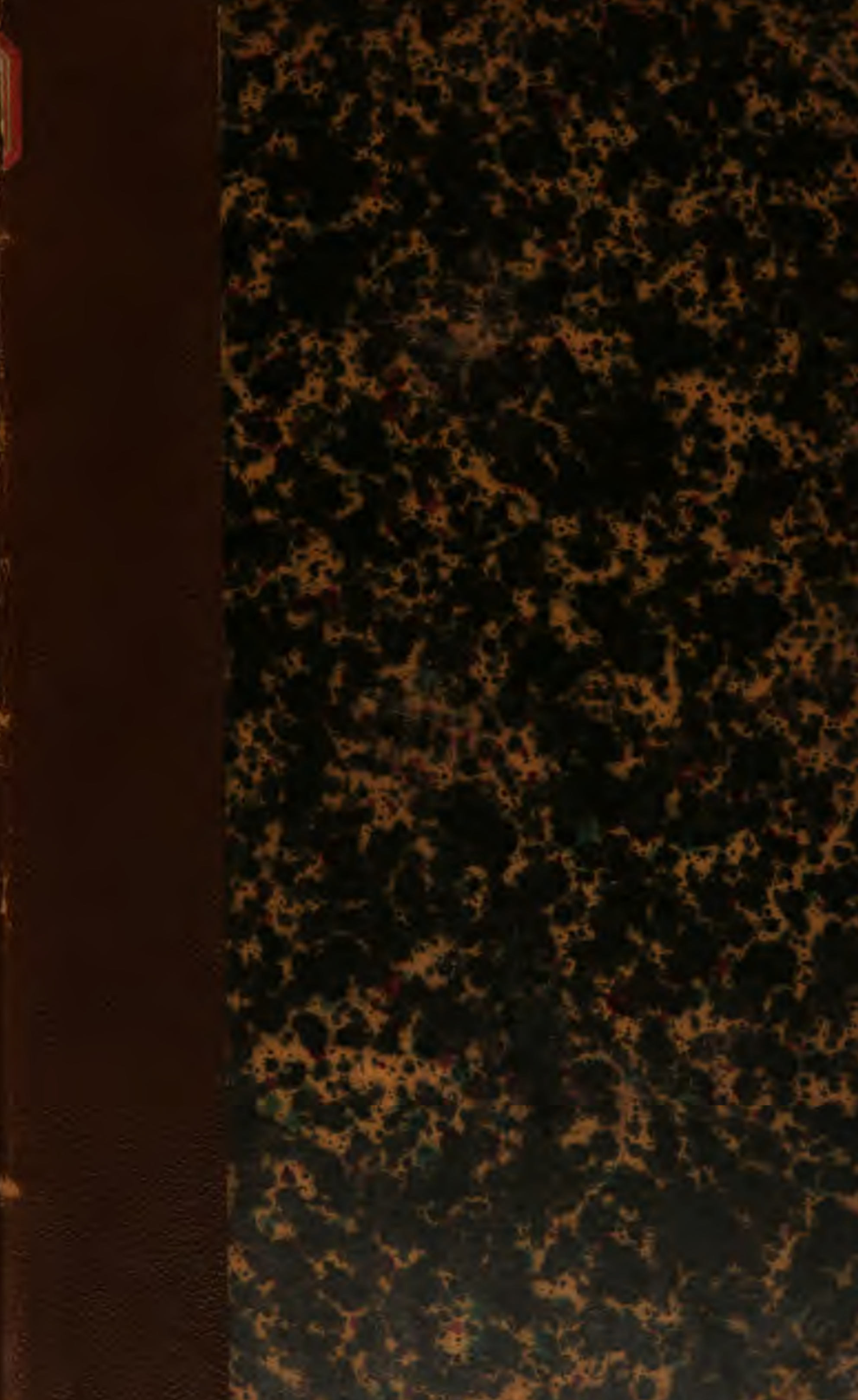
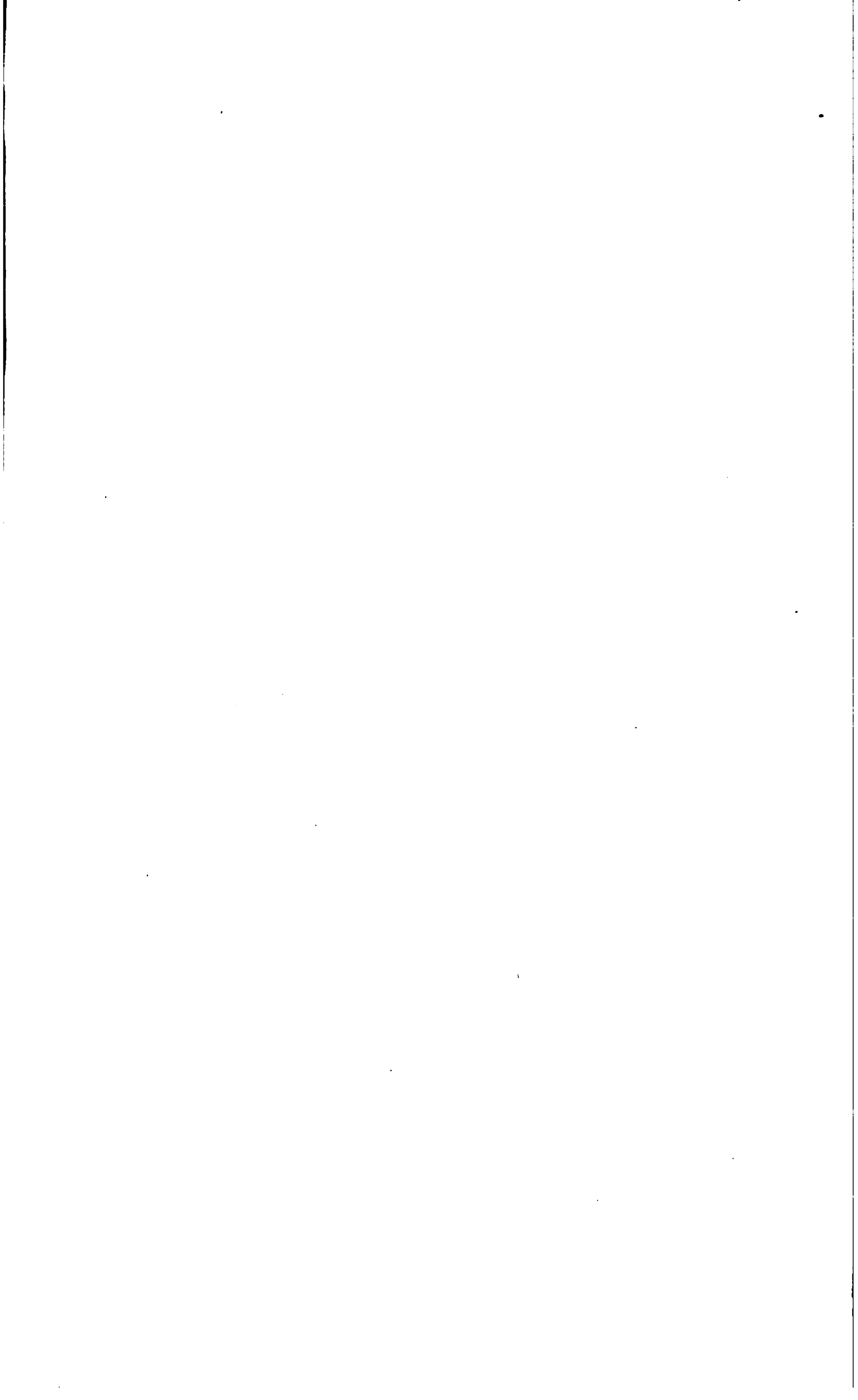


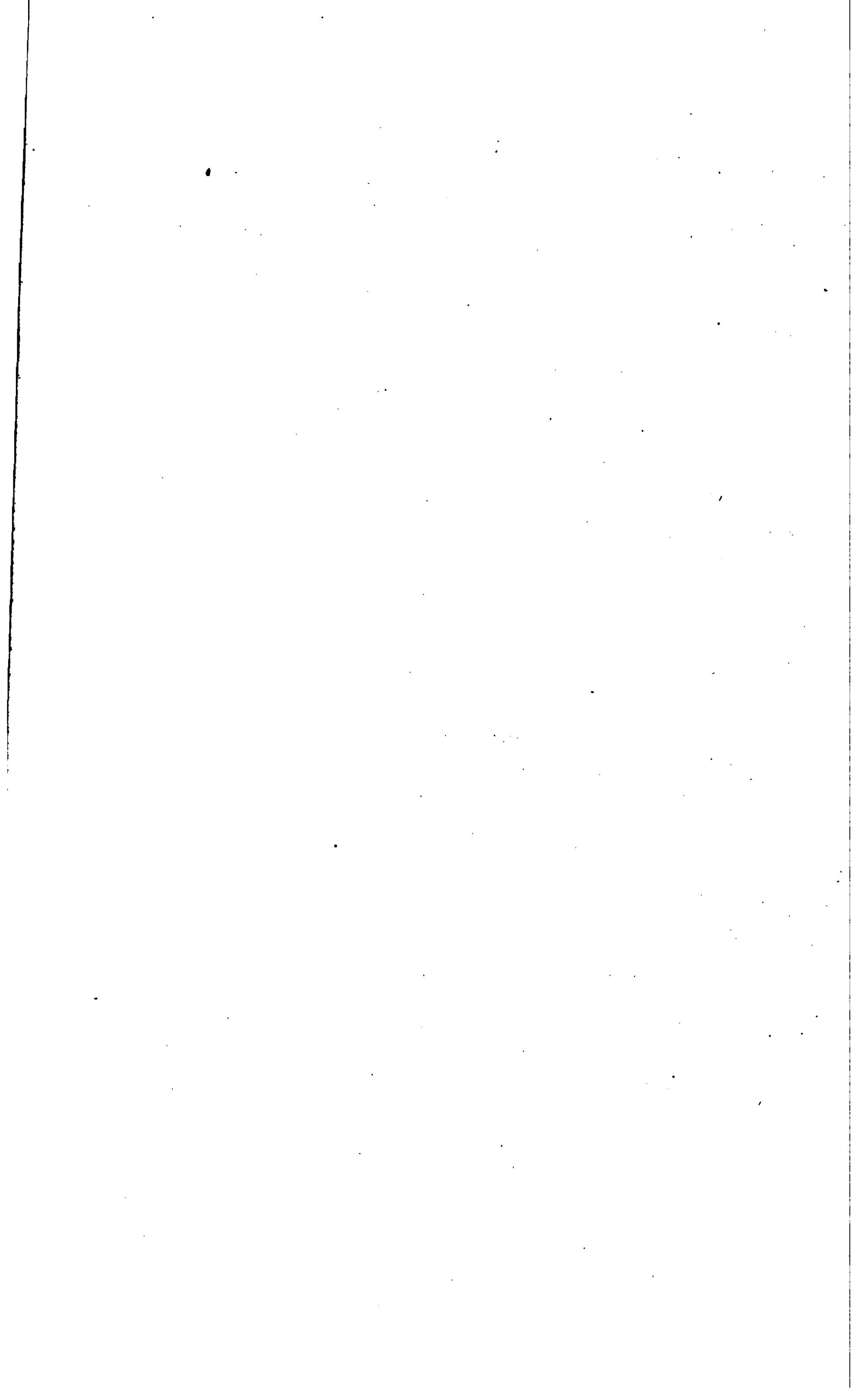



SCIENCE CENTER LIBRARY
Math 8809.04.3
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)









# RELATIONS

ENTRE LES

# ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE

---

RECUEIL DE 273 FORMULES

RELATIVES AU TRIANGLE

AVEC LEURS DÉMONSTRATIONS

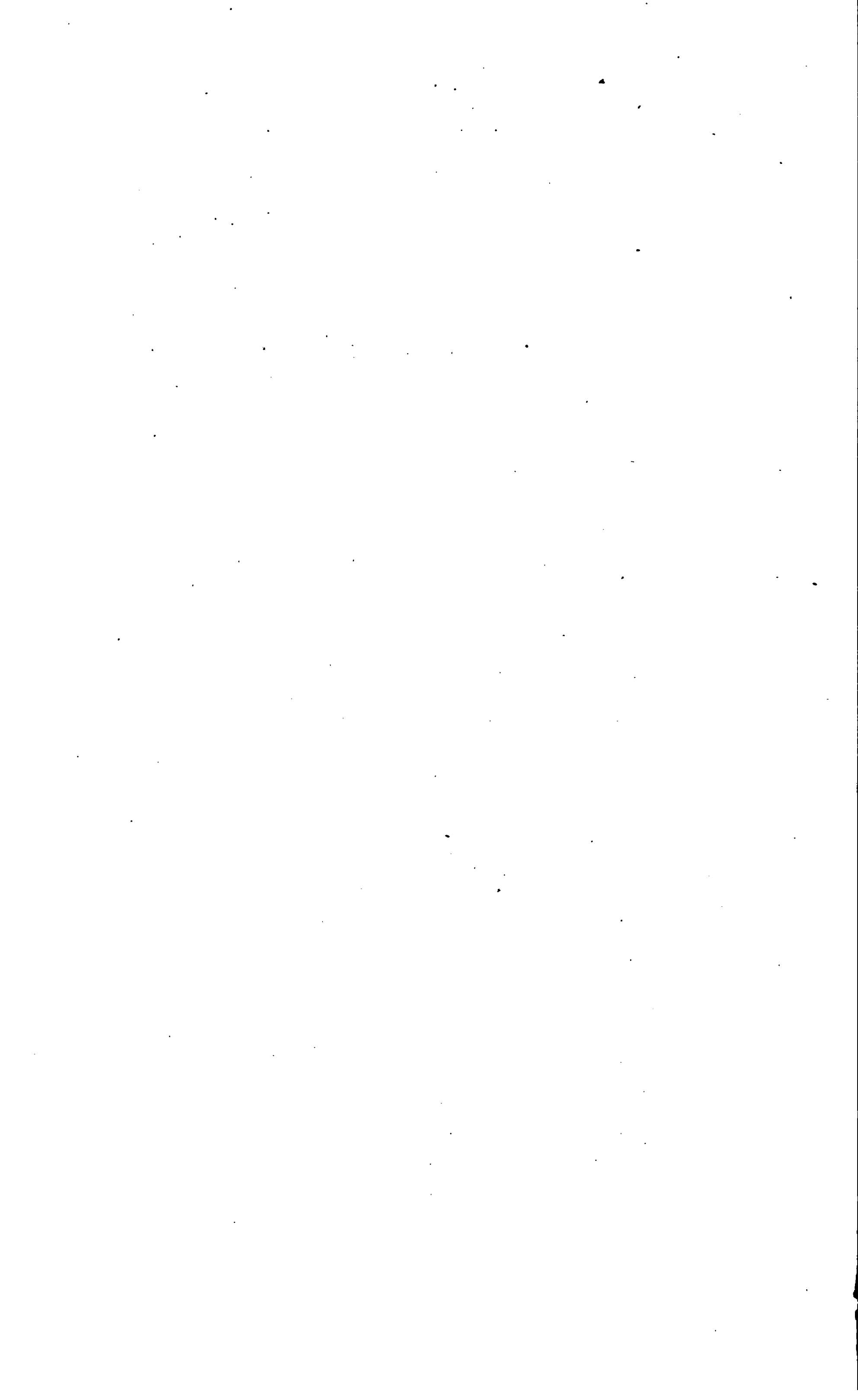
---

DEUXIÈME ÉDITION

---

PARIS
VUIBERT et NONY, ÉDITEURS
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1904



# RELATIONS

## ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE

11. $h_a + h_b + h_c = \dfrac{bc + ca + ab}{2R}$.

12. $\dfrac{t_a}{h_a} + \dfrac{t_b}{h_b} + \dfrac{t_c}{h_c} = 1$.

13. $2(h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c) = a^2 + b^2 + c^2$.

14. $h'_a h''_a = h'_b h''_b = h'_c h''_c$.

15. $h'_b h'_c = 2R h''_a$.

16. $h'_b h'_c + h'_c h'_a + h'_a h'_b = 2R(h''_a + h''_b + h''_c)$.

17. $h'^2_a h'^2_b h'^2_c = 8R^3 h''_a h''_b h''_c$.

18. $h'_a = 2k_a$.

19. $a^2 + h'^2_a = b^2 + h'^2_b = c^2 + h'^2_c = 4R^2$.

20. $h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r)$.

21. $a(k_b + k_c) + b(k_c + k_a) + c(k_a + k_b) = 2pR$.

22. $4(k_a R + k_b k_c) = bc$.

23. $4(k_b k_c + k_c k_a + k_a k_b) = (bc + ca + ab) - 4R(R + r)$.

24. $4(h_a k_a + h_b k_b + h_c k_c) = a^2 + b^2 + c^2$.

25. $4(k_a^2 + k_b^2 + k_c^2) = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

26. $4\left(\dfrac{a}{k_a} + \dfrac{b}{k_b} + \dfrac{c}{k_c}\right) = \dfrac{abc}{k_a k_b k_c}$.

27. $k_a\left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) + k_b\left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) + k_c\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) = 6R$.

28. $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

29. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$

30. $m'_a = 2m''_a.$

31. $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$

32. $l_{1a} = \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc} \qquad (b > c).$

33. $4b^2c^2 = l_a^2(b+c)^2 + l_{1a}^2(b-c)^2.$

34. $\frac{1}{al_al_{1a}} - \frac{1}{bl_bl_{1b}} + \frac{1}{cl_cl_{1c}}. \qquad (a > b > c).$

35. $al'^2_a + bl'^2_b + cl'^2_c = abc.$

36. $\frac{l'_al'_bl'_c}{l''_al''_bl''_c} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$

37. $\frac{l'_al'_bl'_c}{r} = \frac{abc}{p}.$

38. $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$

39. $\mathrm{R}r = \frac{abc}{4p}.$

40. $\mathrm{R}r_a = \frac{abc}{4(p-a)}.$

41. $rr_a = (p-b)(p-c).$

42. $\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}.$

43. $\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right).$

44. $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2$.

45. $\sqrt{\dfrac{r_a r_b r_c}{r}} = p$.

46. $\sqrt{\dfrac{r r_b r_c}{r_a}} + \sqrt{\dfrac{r r_c r_a}{r_b}} + \sqrt{\dfrac{r r_a r_b}{r_c}} = p$.

47. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

48. $\dfrac{(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b)}{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b} = 4R$.

49. $\left(\dfrac{a}{r_a} + \dfrac{b}{r_b} + \dfrac{c}{r_c}\right)\left(\dfrac{a + b + c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4$.

50. $a = \dfrac{r_a(r_b + r_c)}{p}$.

51. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

52. $k_a = \dfrac{r + r_b + r_c - r_a}{4}$.

53. $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$.

54. $a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r)$.

55. $r_a r_b - r r_c = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$.

56. $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2$.

57. $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{S^2}$.

58. $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$

59. $\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}.$

60. $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_a}.$

61. $\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6.$

62. $\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}.$

63. $r^3 = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c.$

64. $\frac{R}{2r} = \frac{r'^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}.$

65. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 4R^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2.$

66. $2R = \frac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}.$

67. $d^2 = R^2 - 2Rr.$

68. $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$

69. $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2.$

70. $3\left(d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2\right) = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4\overline{OH}^2.$

71. $\overline{AO'}^2 = \frac{p-a}{p} bc.$

72. $\overline{AO}_a^2 = \frac{p}{p-a} bc.$

73. $AO'.AO_a = bc.$

74. $\frac{CO'.CO_c}{BO'.BO_b} = \frac{b}{c}.$

75. $\overline{AO'}^2 + \overline{BO'}^2 + \overline{CO'}^2 = bc + ca + ab - 12Rr.$

76. $\frac{\overline{AO'}^2}{bc} + \frac{\overline{BO'}^2}{ca} + \frac{\overline{CO'}^2}{ab} = 1.$

77. $\frac{bc}{\overline{AO}_a^2} + \frac{ca}{\overline{BO}_b^2} + \frac{ab}{\overline{CO}_c^2} = 1.$

78. $AO'.BO'.CO' = 4Rr^2.$

79. $AO_a.BO_a.CO_a = 4Rr_a^2.$

80. $O'O_a.O'O_b.O'O_c = 16R^2r.$

81. $\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2.$

82. $\overline{O_bO_c}^2 + \overline{O_cO_a}^2 + \overline{O_aO_b}^2 = 8R(r_a + r_b + r_c).$

83. $O_bO_c.O_cO_a.O_aO_b = 16R^2p.$

84. $\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$

85. $\overline{GO}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$

86. $\overline{GO'}^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right).$

87. $\overline{GO}_a^2 = \frac{1}{9}\left[p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)\right].$

88. $\overline{GO'}^2 + \overline{GO}_a^2 + \overline{GO}_b^2 + \overline{GO}_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$

89. $\overline{HO'}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$

90. $\overline{HO'}^2 + \overline{HO}_a^2 + \overline{HO}_b^2 + \overline{HO}_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2).$

91. $O_9O' = \frac{R}{2} - r.$

92. $O_9O_a = \frac{R}{2} + r_a.$

93. $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}.$

94. $S = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{h_b^2h_c^2} + \frac{1}{h_c^2h_a^2} + \frac{1}{h_a^2h_b^2}\right) - \left(\frac{1}{h_a^4} + \frac{1}{h_b^4} + \frac{1}{h_c^4}\right)}}.$

95. $S = \frac{1}{4}\left(ah'_a + bh'_b + ch'_c\right).$

96. $S = 2R^2\,\dfrac{h_ah_bh_c}{abc}.$

97. $S = \sqrt{\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c}.$

98. $S = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}. \quad (2M = m_a + m_b + m_c).$

99. $S = \dfrac{l_al_bl_c(b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}.$

100. $S = \sqrt{\frac{l_{1a}l_{1b}l_{1c}(b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}}$. $(a > b > c)$.

101. $S = \frac{l_a l_{1a}(b^2-c^2)}{4bc}$. $(b > c)$.

102. $S = \sqrt{rr_a r_b r_c}$.

103. $S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$.

104. $S = a\frac{rr_a}{r_a - r}$.

105. $S = a\frac{r_b r_c}{r_b + r_c}$.

106. $S = \frac{(a+b)rr_c}{r+r_c}$.

107. $S = \frac{(a-b)r_a r_b}{r_a - r_b}$.

108. $S = \frac{rr_a(r_b+r_c)}{a}$.

109. $S = rr_a\sqrt{\frac{4R-(r_a-r)}{r_a-r}}$.

110. $S = r_a r_b\sqrt{\frac{\overline{O_aO_b}^2}{(r_a+r_b)^2}-1}$.

# ÉLÉMENTS ANGULAIRES

---

**111.** $A + B + C = \pi.$

**112.** $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

**113.** $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

**114.** $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$

**115.** $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1.$

**116.** $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}.$

**117.** $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}.$

**118.** $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4} + 1.$

**119.** $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4} - 1.$

**120.** $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$

**121.** $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C.$

**122.** $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1.$

**123.** $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -4 \sin A \sin B \cos C + 1.$

**124.** $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

**125.** $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1.$

**126.** $$\sin kA + \sin kB + \sin kC = \begin{cases} -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}\cdot & k=4m \\ 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+1 \\ 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+2 \\ -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+3 \end{cases}$$

$m$, entier.

**127.** $$\sin kA + \sin kB - \sin kC = \begin{cases} -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}\cdot & k=4m \\ 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+1 \\ 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+2 \\ -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}\cdot & k=4m+3 \end{cases}$$

$m$, entier.

**128.** $$\cos kA + \cos kB + \cos kC = \begin{cases} 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1. & k=4m \\ 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1. & k=4m+1 \\ -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1. & k=4m+2 \\ -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1. & k=4m+3 \end{cases}$$

$m$, entier.

**129.** $\cos kA + \cos kB - \cos kC = \begin{cases} 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}+1. & k=4m \\ 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}-1. & k=4m+1 \\ -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}+1. & k=4m+2 \\ -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}+1. & k=4m+3 \end{cases}$

$m$, entier.

**130.** $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = -2\cos A\cos B\cos C + 1.$

**131.** $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\cos A\cos B\cos C + 2.$

**132.** $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C.$

**133.** $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = -2\sin A\sin B\cos C + 1.$

**134.** $\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC$
$= 2(-1)^k\cos kA\cos kB\cos kC + 1.$ $k$, entier.

**135.** $\sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC$
$= -2(-1)^k\cos kA\cos kB\cos kC + 2.$ $k$, entier.

**136.** $\sin^2 kA + \sin^2 kB - \sin^2 kC$
$= -2(-1)^k\sin kA\sin kB\cos kC.$ $k$, entier.

**137.** $\cos^2 kA + \cos^2 kB - \cos^2 kC$
$= 2(-1)^k\sin kA\sin kB\cos kC + 1.$ $k$, entier.

**138.** $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = -2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$

**139.** $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2.$

**140.** $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

**141.** $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$

**142.** $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C$
$= 3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}.$

**143.** $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$
$= 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{3A}{2} \sin \frac{3B}{2} \sin \frac{3C}{2} + 1.$

**144.** $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C$
$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C + 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{3}{2}.$

**145.** $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C$
$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2}.$

**146.** $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$

**147.** $\operatorname{tg} mA + \operatorname{tg} mB + \operatorname{tg} mC = \operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC.$ *m*, entier.

**148.** $\operatorname{cotg} mB \operatorname{cotg} mC + \operatorname{cotg} mC \operatorname{cotg} mA + \operatorname{cotg} mA \operatorname{cotg} mB$
$= 1.$ *m*, entier.

**149.** $\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$

**150.** $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1.$

**151.** $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$
$= \sin A \sin B \sin C.$

**152.** $\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B$
$= \cos A \cos B \cos C + 1.$

**153.** $\cot A + \cot B + \cot C$
$= \cot A \cot B \cot C + \operatorname{cos\acute{e}c} A \operatorname{cos\acute{e}c} B \operatorname{cos\acute{e}c} C.$

**154.** $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1 + \operatorname{s\acute{e}c} A \operatorname{s\acute{e}c} B \operatorname{s\acute{e}c} C.$

**155.** $\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - (\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C)$
$= 2 + 2 \operatorname{s\acute{e}c} A \operatorname{s\acute{e}c} B \operatorname{s\acute{e}c} C.$

**156.** $\operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C - (\operatorname{tg}^3 A + \operatorname{tg}^3 B + \operatorname{tg}^3 C) = \dfrac{3 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos A \cos B \cos C}.$

**157.** $\dfrac{\cot B + \cot C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \dfrac{\cot C + \cot A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} + \dfrac{\cot A + \cot B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 1.$

**158.** $\left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{C}{4}\right) = 2 + 2 \operatorname{tg} \dfrac{A}{4} \operatorname{tg} \dfrac{B}{4} \operatorname{tg} \dfrac{C}{4}.$

**159.** $\dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C}{2 \cos A \cos B \cos C}.$

**160.** $\dfrac{\cot A + \cot B + \cot C - 2(\cot 2A + \cot 2B + \cot 2C)}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}}$
$= (\operatorname{s\acute{e}c} A - 1)(\operatorname{s\acute{e}c} B - 1)(\operatorname{s\acute{e}c} C - 1).$

**161.** $\cot \dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$

**162.** $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = - \dfrac{\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C}{\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1}.$

**163.** $(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B)(\sin C + \cos C)$
$= 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \cos A \cos B \cos C + 1.$

**164.** $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin C \sin A} + \dfrac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$

**165.** $\frac{\text{tg } B}{\text{tg } C} + \frac{\text{tg } C}{\text{tg } B} + \frac{\text{tg } C}{\text{tg } A} + \frac{\text{tg } A}{\text{tg } C} + \frac{\text{tg } A}{\text{tg } B} + \frac{\text{tg } B}{\text{tg } A}$
$= \text{séc } A \text{ séc } B \text{ séc } C - 2.$

**166.** $\frac{1 - \text{tg } B \text{ tg } C}{\cos^2 A} + \frac{1 - \text{tg } C \text{ tg } A}{\cos^2 B} + \frac{1 - \text{tg } A \text{ tg } B}{\cos^2 C}$
$= - \frac{3}{\cos A \cos B \cos C}.$

**167.** $\sin\left(B + \frac{C}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{B}{2}\right)$
$= 4 \cos \frac{B - C}{4} \cos \frac{C - A}{4} \cos \frac{A - B}{4} - 1.$

**168.** $\sin A \sin (A - B) \sin (A - C) + \sin B \sin (B - C) \sin (B - A)$
$+ \sin C \sin (C - A) \sin (C - B) = \sin A \sin B \sin C$
$- \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

**169.** $\sin^3 A \cos (B - C) + \sin^3 B \cos (C - A) + \sin^3 C \cos (A - B)$
$= 3 \sin A \sin B \sin C.$

---

## ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES

---

**170.** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

**171.** $a = b \cos C + c \cos B.$

**172.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

**173.** $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

**174.** $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$

**175.** $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$

**176.** $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}.$

**177.** $a = p\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}\cos \frac{C}{2}}.$

**178.** $\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$

**179.** $\frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$

**180.** $\frac{\sin (A-B)}{\sin (A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$

**181.** $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}.$

**182.** $a \sin (B-C) + b \sin (C-A) + c \sin (A-B) = 0.$

**183.** $\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin C} = 0.$

184. $$\frac{a \sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 0.$$

185. $$\frac{a \sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 0.$$

186. $$\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$$

187. $$\frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p^2}{abc}.$$

188. $$(b-c) \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} + (c-a) \operatorname{tg} \frac{C+A}{2} + (a-b) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 0.$$

189. $$(b+c) \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} + (c+a) \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} + (a+b) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 0.$$

190. $$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = 0.$$

191. $$R = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}}.$$

192. $$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

193. $$(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{p^2}{2R^2}.$$

194. $$\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = R \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

**195.** $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}.$

**196.** $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}.$

**197.** $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}.$

**198.** $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}.$

**199.** $\frac{R}{r}=\frac{a+b+c}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}.$

**200.** $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}.$

**201.** $\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}.$

**202.** $\sin A\sin B\sin C=\frac{pr}{2R^2}.$

**203.** $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$

**204.** $\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}.$

**205.** $\cos A\cos B\cos C=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$

**206.** $a\operatorname{cotg}A+b\operatorname{cotg}B+c\operatorname{cotg}C=2(R+r).$

**207.** $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}.$

**208.** $h_a=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}.$

209. $h_a = \dfrac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$

210. $h'_a = 2R \cos A = a \operatorname{cotg} A.$

211. $h''_a = 2R \cos B \cos C.$

212. $l_a = \dfrac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}.$

213. $l_{1a} = \dfrac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}.$

214. $l'_a = \dfrac{bc}{p} \cos \dfrac{A}{2}.$

215. $l''_a = \dfrac{abc}{p(b + c)} \cos \dfrac{A}{2}.$

216. $a^2 + b^2 + c^2 = R(h_a \cos A + h_b \cos B + h_c \cos C).$

217. $r_a = p \operatorname{tg} \dfrac{A}{2}.$

218. $r_a = (p - b) \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2} = (p - c) \operatorname{cotg} \dfrac{B}{2}.$

219. $r_a = 4R \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}.$

220. $r_a + r = 4R \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B - C}{2}.$

**221.** $r_a - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}$.

**222.** $r_a + r_b = 4R \cos^2 \frac{C}{2}$.

**223.** $r_a - r_b = 4R \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}$.

**224.** $a = r_a\left(\text{tg} \frac{B}{2} + \text{tg} \frac{C}{2}\right)$.

**225.** $r = \dfrac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$.

**226.** $r_a = \dfrac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$.

**227.** $r_a = r \,\text{cotg} \frac{B}{2} \,\text{cotg} \frac{C}{2}$.

**228.** $r_a + r_b + r_c = 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C)$.

**229.** $r_a r_b r_c = abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

**230.** $r_a r_b r_c \,\text{cotg} \frac{A}{2} \,\text{cotg} \frac{B}{2} \,\text{cotg} \frac{C}{2} = p^3$.

**231.** $r = \dfrac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$.

**232.** $r_a = \dfrac{h_a \sin \dfrac{A}{2}}{2 \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}.$

**233.** $\dfrac{h_a - 2r}{h_a} = \dfrac{h_a}{h_a + 2r_a} = \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}.$

**234.** $AO' = \dfrac{p-a}{\cos \dfrac{A}{2}} = \dfrac{r}{\sin \dfrac{A}{2}}.$

**235.** $AO' = \dfrac{p \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}} = \dfrac{2a \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}{\sin A} = 4R \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}.$

**236.** $AO_a = \dfrac{p}{\cos \dfrac{A}{2}} = \dfrac{r_a}{\sin \dfrac{A}{2}}.$

**237.** $AO_b = \dfrac{p-c}{\sin \dfrac{A}{2}} = \dfrac{r_b}{\cos \dfrac{A}{2}}.$

**238.** $O'O_a = \dfrac{a}{\cos \dfrac{A}{2}} = 4R \sin \dfrac{A}{2}.$

**239.** $O_aO_b = \dfrac{c}{\sin \dfrac{C}{2}} = 4R \cos \dfrac{C}{2}.$

**240.** $q_bq_c \sin A + q_cq_a \sin B + q_aq_b \sin C = 0.$

**241.** $\sqrt{q_a} \cos \dfrac{A}{2} + \sqrt{q_b} \cos \dfrac{B}{2} + \sqrt{q_c} \cos \dfrac{C}{2} = 0.$

**242.** $S = \dfrac{bc \sin A}{2}.$

**243.** $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$

**244.** $S = \dfrac{abc^2 \sin (A - B)}{2(a^2 - b^2)}.$

**245.** $S = \dfrac{(a^2 - b^2) \sin A \sin B}{2 \sin (A - B)} = \dfrac{a^2 - b^2}{2(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B)}.$

**246.** $S = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \operatorname{tg} \dfrac{A + B - C}{2}}.$

**247.** $S = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C}.$

**248.** $S = p^2 \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}.$

**249.** $S = \dfrac{abc}{p} \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}.$

**250.** $S = \sqrt{abcp \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}.$

**251.** $S = \dfrac{p^2}{\operatorname{cotg} \dfrac{A}{2} + \operatorname{cotg} \dfrac{B}{2} + \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2}}.$

**252.** $S = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)}.$

**253.** $S = \dfrac{a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A}{4}.$

**254.** $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$

**255.** $S = Ra \sin B \sin C.$

**256.** $S = 4Rp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

**257.** $S = \frac{R}{2}\left(a \cos A + b \cos B + c \cos C\right).$

**258.** $S = Rr (\sin A + \sin B + \sin C).$

**259.** $S = \frac{2}{3} R^2 \left[\sin^3 A \cos (B - C) + \sin^3 B \cos (C - A) + \sin^3 C \cos (A - B)\right].$

**260.** $S = Rh_a \sin A.$

**261.** $S = \frac{1}{8R}\left(a^2 h'_a \operatorname{cos\acute{e}c} A + b^2 h'_b \operatorname{cos\acute{e}c} B + c^2 h'_c \operatorname{cos\acute{e}c} C\right).$

**262.** $S = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)}.$

**263.** $S = \frac{2}{3} (m_b^2 - m_a^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}.$

**264.** $S = \frac{1}{2} l_a(b + c) \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} l_a a \cos \frac{B - C}{2}.$

**265.** $S = \frac{1}{2} l_{1a}(b - c) \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} l_{1a} a \sin \frac{B - C}{2}.$ $(b > c).$

**266.** $S = r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$

**267.** $S = r_a^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$

**268.** $S = r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + 2Rr \sin A.$

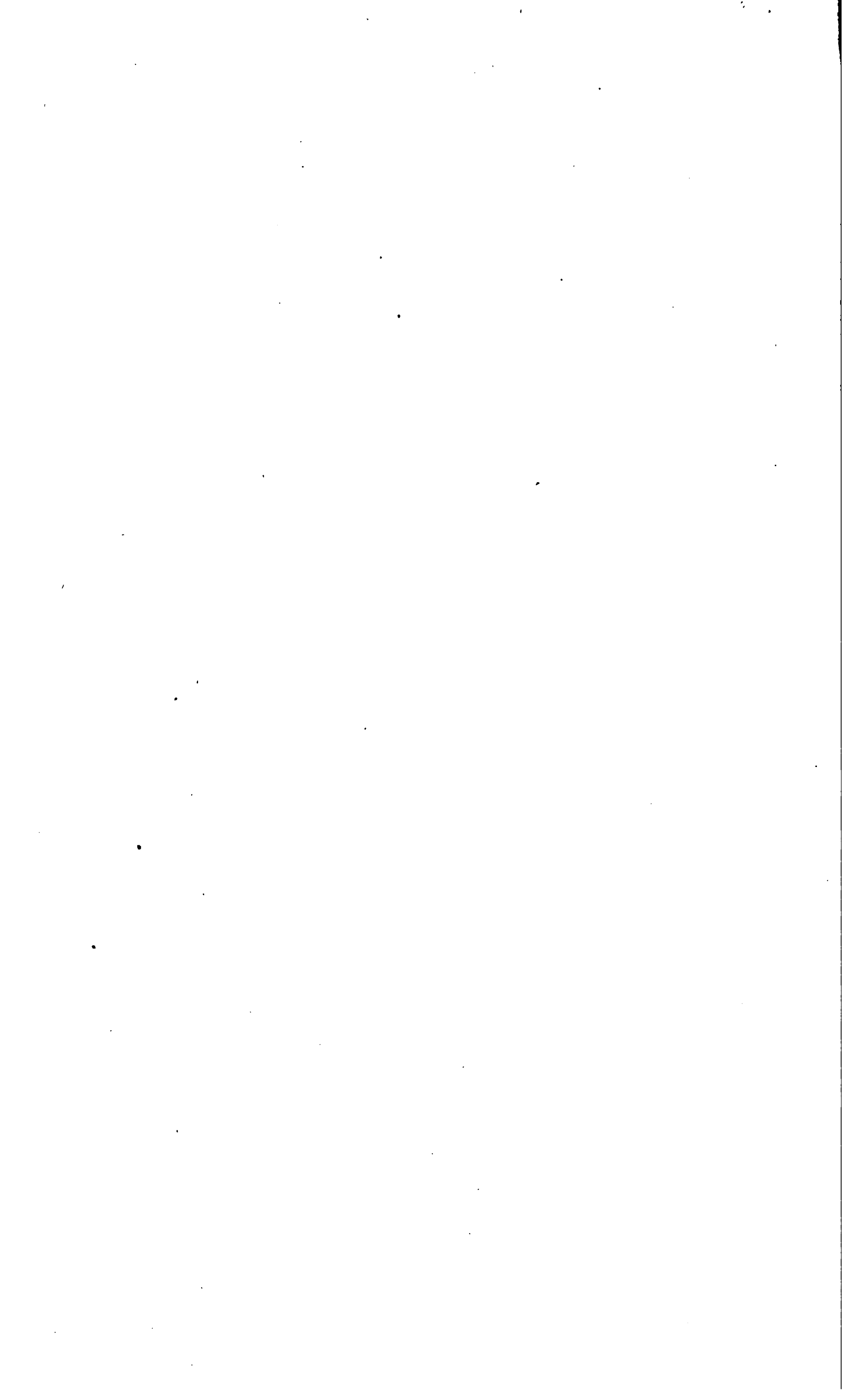
**269.** $S = rr_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$

**270.** $S = r_b r_c \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$

**271.** $S = \frac{r^2 (\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2 \sin A \sin B \sin C}.$

**272.** $S = \frac{1}{4}\sqrt{2r . O_bO_c . O_cO_a . O_aO_b . \sin A \sin B \sin C}.$

**273.** $S = \frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right)}.$



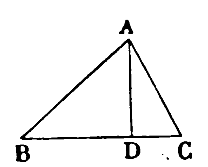
# DÉMONSTRATIONS

## ÉLÉMENTS LINÉAIRES

La formule 1 est établie dans tous les traités de géométrie.

### Formule 2.

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$




Dans le triangle rectangle ADC, on a

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2;$$

pour calculer CD on se sert de l'égalité

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD,$$

ou

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2a \times CD.$$

On en tire

$$CD = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a};$$

en remplaçant dans la valeur de $\overline{AD}^2$, on obtient

$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}.$$

Nous avons au numérateur une différence de deux carrés ; on peut donc écrire

$$h_a^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)[2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

En posant $a + b + c = 2p$,
on obtient $b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$,

$c + a - b = 2(p - b)$,

$a + b - c = 2(p - c)$,

et par suite

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2},$$

d'où

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

**Formule 3.**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

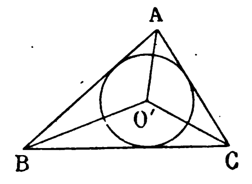
On obtient cette formule en remplaçant $h_a$ par sa valeur (2) dans la formule $S = \frac{1}{2} ah_a$ (1).

---

**Formule 4.**

$$S = pr.$$

---




L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles O'BC, O'CA et O'AB. Or, ces triangles ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit, leurs ba-

ses sont les côtés du triangle ; on a donc

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = pr.$$

---

**Formule 5.**

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

De (4) on tire $r = \frac{S}{p}$,

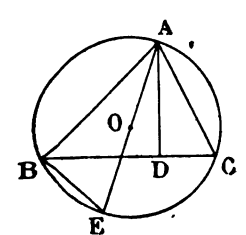
et en y remplaçant S par sa valeur (3), on a la formule demandée.

---

**Formule 6.**

$$2Rh_a = bc.$$

Menons le diamètre AE du cercle circonscrit et tirons BE.




Les deux triangles rectangles ACD et ABE sont semblables, puisque l'angle BEA est égal à l'angle DCA comme ayant même mesure. On a donc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

ou $AB \times AC = AD \times AE,$

$$bc = 2Rh_a.$$

---

### Formule 7.

$$abc = 4RS.$$

Multiplions par $a$ les deux membres de la formule **6** ; on a

$$abc = 2Rah_a,$$

et comme $2S = ah_a$, il vient la formule demandée.

### Formule 8.

$$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

De la formule **5** on tire, en élevant au carré les deux membres,

$$pr^2 = (p - a)(p - b)(p - c)$$
$$= p^3 - p^2(a + b + c) + p(bc + ca + ab) - abc,$$

ou, en remplaçant $a + b + c$ par $2p$,

$$pr^2 = -p^3 + p(bc + ca + ab) - abc.$$

Or, la formule **7** donne

$$abc = 4RS$$

ou, en tenant compte de **4**,

$$abc = 4Rrp.$$

Remplaçons $abc$ par cette valeur dans la formule précédente, divisons par $p$ ; on obtient

$$r^2 = -p^2 + bc + ca + ab - 4Rr,$$

ou

$$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

### Formule 9.

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr.$$

On a

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab).$$

Remplaçons $a+b+c$ par $2p$ et $bc+ca+ab$ par sa valeur déduite de la formule précédente ; il vient

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)\\&=2p^2-2r^2-8Rr.\end{aligned}$$

### Formule 10.

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Remplaçons dans le premier nombre $h_a$, $h_b$, $h_c$ respectivement par $\frac{2S}{a}$, $\frac{2S}{b}$, $\frac{2S}{c}$ ; l'expression devient

$$\begin{aligned}\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\left(\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}\right)&=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2S}(a+b+c)\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

### Formule 11.

$$h_a+h_b+h_c=\frac{bc+ca+ab}{2R}.$$

De 6 on tire $\qquad h_a=\frac{bc}{2R},$

puis les deux formules analogues

$$h_b = \frac{ca}{2R},$$

$$h_c = \frac{ab}{2R};$$

en ajoutant, on a la formule demandée.

---

### Formule 12.

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1.$$

---

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC. Les deux triangles ABC et MBC ayant même base BC sont entre eux comme leurs hauteurs ; donc

$$\left.\begin{aligned} &\frac{MBC}{ABC} = \frac{t_a}{h_a}. \\ &\text{On a de même} \\ &\frac{MCA}{ABC} = \frac{t_b}{h_b}, \\ &\frac{MAB}{ABC} = \frac{t_c}{h_c}. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

En ajoutant ces trois relations membre à membre, on a

$$\frac{MBC + MCA + MAB}{ABC} = \frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c},$$

ou

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = \frac{ABC}{ABC} = 1.$$

Remarque. — Cette relation n'a plus lieu si le point M est à l'extérieur du triangle, car dans ce cas on ne peut écrire

$$\text{MBC} + \text{MCA} + \text{MAB} = \text{ABC}.$$

Il importe alors d'indiquer comment la formule **12** doit être modifiée. Pour cela, on peut observer que les trois côtés du triangle divisent le plan en sept régions ; la région intérieure, puis six autres régions extérieures, que nous désignons par les numéros (1), (2), (3), (1)', (2)', (3)'.

Pour tout point $M_1$ de la région (1), on a

$$M_1\text{CA} + M_1\text{AB} - M_1\text{BC} = \text{ABC},$$

ce qui donne, en tenant compte des relations (A), exactes pour tout point du plan,

$$-\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 0.$$

On aurait des formules analogues pour les points des régions (2) et (3).

Considérons maintenant un point $M_1'$ de la région (1)'. On voit aisément que

$$M_1'\text{BC} - M_1'\text{CA} - M_1'\text{AB} = \text{ABC},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{t_a}{h_a} - \frac{t_b}{h_b} - \frac{t_c}{h_c} = 1.$$

On peut obtenir une même formule pour tous les points du plan à l'aide de la convention suivante :

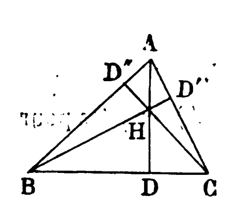
Désignons par $t_a$ un nombre algébrique dont la valeur absolue soit la distance du point M au côté BC et dont le signe soit le signe $+$ si le point M est par rapport à BC du même côté que le sommet opposé A, et le signe $-$ dans le cas contraire ; en supposant que $t_b$ et $t_c$ soient des nombres algébriques analogues, on aura la formule **12** quelle que soit la position du point M dans le plan.

Les nombres $t_a$, $t_b$, $t_c$ ainsi définis sont appelés les *coordonnées trilatères* du point M.

**Formule 13.**

$$2(h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

---




On a la relation

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD',$$

ou

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2AC \times AD'.$$

Mais le quadrilatère HDCD' étant inscriptible, on a

$$AD' \times AC = AH \times AD = h'_a h_a.$$

Donc

$$h_a h'_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

De même,

$$h_b h'_b = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

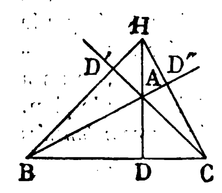
$$h_c h'_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2};$$

et, en ajoutant,

$$h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}:$$

c'est la formule demandée.

Nous avons supposé que le triangle n'avait que des angles aigus. Supposons maintenant que l'angle A soit obtus. On aura




$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD',$$

d'où l'on déduira

$$h_a h'_a = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Mais on a comme plus haut

$$h_b h'_b = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$h_c h'_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2};$$

on en déduit

$$-h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

La formule **13** n'est donc vérifiée que si le triangle n'a que des angles aigus ; dans le cas où le triangle a un angle obtus, il faut mettre le signe — devant celui des trois produits qui correspond à l'angle obtus.

On peut aussi rendre la formule **13** générale à condition d'y considérer $h'_a$, $h'_b$, $h'_c$ comme des nombres algébriques qui seraient les coordonnées trilatères du point H par rapport au triangle obtenu en menant par les points A, B, C des parallèles aux côtés opposés.
On vérifiera sans peine que toutes les formules suivantes où figurent ces quantités sont générales avec ces conventions.

---

## Formule 14.

$$h'_a h''_a = h'_b h''_b = h'_c h''_c.$$

---

Les quatre points B, C, D' et D'' (figures précédentes) sont sur un cercle ; donc

$$HB \times HD' = HC \times HD'',$$

ou

$$h'_b h''_b = h'_c h''_c;$$

et en considérant le quadrilatère inscriptible CAD''D, on aurait

$$h'_c h''_c = h'_a h''_a.$$

La formule **14** est établie.

Pour que cette formule soit générale, en y considérant $h'_a$, $h'_b$ et $h'_c$ comme des quantités algébriques affectées de signe, il est nécessaire d'y considérer aussi $h''_a$, $h''_b$, $h''_c$ comme des nombres algébriques.
On supposera que $h''_a$, $h''_b$ et $h''_c$ sont *les coordonnées trilatères* du point H. (Voir **12**, Remarque.)

Ainsi, dans la seconde figure du n° 13, $h''_a$ sera positif, $h''_b$ et $h''_c$ seront négatifs. On aura toujours

$$h_a = h'_a + h''_a.$$

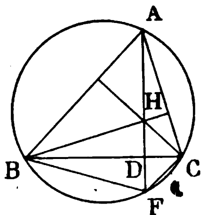
---

**Formule 15.**

$$h'_b h'_c = 2Rh''_a.$$

---

Soit F le point où la hauteur AD rencontre le cercle circonscrit. Les deux triangles BHC et BFC sont égaux, car ils ont le côté BC commun ; en outre




$\widehat{CBF} = \widehat{CAF}$, (même mesure)

$\widehat{CAF} = \widehat{HBC}$,

comme complémentaires du même angle C ; donc

$\widehat{CBF} = \widehat{HBC}$ ;

on verrait de même que

$\widehat{BCF} = \widehat{HCB}$.

Ces deux triangles étant égaux, les cercles qui leur sont circonscrits sont égaux. Or le cercle circonscrit à BFC est le même que le cercle circonscrit au triangle ABC ; il en résulte que le rayon du cercle circonscrit au triangle BHC est égal à R, et en appliquant la formule 6 à ce triangle, on a

$$HB \times HC = 2R \times HD,$$

ou

$$h'_b \times h'_c = 2Rh''_a.$$

Cette formule subsiste dans tous les cas, en tenant compte des signes.

---

**Formule 16.**

$$h'_b h'_c + h'_c h'_a + h'_a h'_b = 2R(h''_a + h''_b + h''_c).$$

Il suffit d'ajouter la formule **15** aux deux formules analogues :

$$h'_c h'_a = 2Rh''_b,$$
$$h'_a h'_b = 2Rh''_c.$$

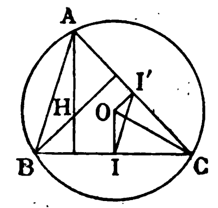
**Formule 17.**

$$h'^2_a h'^2_b h'^2_c = 8R^3 h''_a h''_b h''_c.$$

On multiplie les trois formules qu'on a ajoutées dans le numéro précédent.

**Formule 18.**

$$h'_a = 2k_a.$$




I et I' sont les milieux de BC et de AC. Les deux triangles ABH et OII' sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles, et comme II' est la moitié de AB, on en conclut que OI est la moitié de AH, c'est-à-dire que

$$h'_a = 2k_a.$$

**Formule 19.**

$$a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4R^2.$$

---

Dans le triangle rectangle OIC (figure précédente) on a

$$\overline{OC}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IC}^2,$$

$$R^2 = k_a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Chassant le dénominateur et tenant compte de 18, il vient

$$4R^2 = a^2 + h_a'^2.$$

On établit de même que

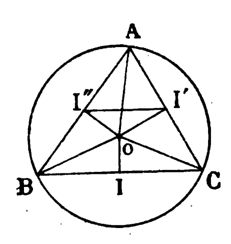
$$4R^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2.$$

---

**Formule 20.**

$$h_a' + h_b' + h_a' = 2(R + r).$$

---




En tenant compte de 18, on peut écrire cette formule

$$k_a + k_b + k_c = (R + r)\ ;$$

c'est sous cette forme que nous allons l'établir.

Dans le quadrilatère inscriptible AI′OI″, on a

$$OA \times I'I'' = AI' \times OI'' + AI'' \times OI',$$

ou

$$R \times \frac{a}{2} = \frac{b}{2} k_c + \frac{c}{2} \cdot k_b,$$

ou

$$bk_c + ck_b = aR.$$

On a de même

$$ck_a + ak_c = bR,$$

$$ak_b + bk_a = cR.$$

(A)

Ajoutons membre à membre ; il vient

$$k_a(b+c)+k_b(c+a)+k_c(a+b)=(a+b+c)\mathrm{R},$$

qu'on peut écrire

$$(k_a+k_b+k_c)(a+b+c)-ak_a-bk_b-ck_c=(a+b+c)\mathrm{R},$$

ou

$$2p(k_a+k_b+k_c)=2p\mathrm{R}+ak_a+bk_b+ck_c.$$

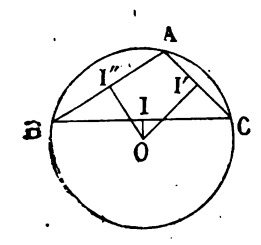
Or écrivant que l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles OBC, OCA et OAB, on a

$$ak_a+bk_b+ck_c=2\mathrm{S}=2pr\,;$$

en remplaçant, on obtient, après avoir divisé par $2p$,

$$k_a+k_b+k_c=\mathrm{R}+r.$$

REMARQUE. — Cette formule n'a lieu que si le triangle n'a pas d'angle obtus. Dans le cas où l'angle A est obtus, le point O n'est plus à l'intérieur du triangle, il se trouve dans la région (1) (figure du nº 12). En considérant toujours les quadrilatères OI'AI", OBI"I et OCI'I, on obtient les mêmes formules (A), où $k_a$ est remplacé par $-k_a$.




Observons aussi que dans la même hypothèse on a

$$-ak_a+bk_b+ck_c=2\mathrm{S}\,;$$

on obtient alors la formule

$$-k_a+k_b+k_c=\mathrm{R}+r.$$

Si l'on suppose que $k_a$, $k_b$, $k_c$ représentent les distances du point O aux trois côtés affectées du signe + si le point O se trouve par rapport à chaque côté dans la même région que le sommet opposé, et du signe — dans le cas contraire, en d'autres termes que $k_a$, $k_b$, $k_c$ sont les *coordonnées trilatères* du point O (12), on aura toujours

$$k_a+k_b+k_c=\mathrm{R}+r.$$

Remarquons de plus que si $h'_a$, $h'_b$, $h'_c$ sont les quantités algé-

briques définies au numéro 13, on aura dans tous les cas

$$h'_a = 2k_a;$$

car on voit aisément que $h'_a$ et $k_a$ ont toujours le même signe ; on aura donc la formule

$$h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r).$$

---

**Formule 21.**

$$a(k_b + k_c) + b(k_c + k_a) + c(k_a + k_b) = 2pR.$$

---

Il suffit d'ajouter les relations (A) du numéro 20.

---

**Formule 22.**

$$4(k_a R + k_b k_c) = bc.$$

---

Remplaçons dans le premier membre $k_a$, $k_b$, $k_c$ par les valeurs égales $\frac{h'_a}{2}$, $\frac{h'_b}{2}$ et $\frac{h'_c}{2}$ (18) ; on obtient

$$4(k_a R + k_b k_c) = 2h'_a R + h'_b h'_c ;$$

mais de 15 on déduit

$$h'_b h'_c = 2Rh''_a ;$$

donc

$$4(k_a R + k_b k_c) = 2R(h'_a + h''_a) = 2Rh_a,$$

et, en tenant compte de 6,

$$4(k_a R + k_b k_c) = bc.$$

---

### Formule 23.

$$4(k_b k_c + k_c k_a + k_a k_b) = bc + ca + ab - 4R(R + r).$$

---

On peut écrire

$$4(k_b k_c + k_c k_a + k_a k_b) = h'_b h'_c + h'_c h'_a + h'_a h'_b. \qquad (18)$$

ou, en tenant compte de 16,

$$\begin{aligned} 4(k_b k_c + k_c k_a + k_a k_b) &= 2R(h''_a + h''_b + h''_c) \\ &= 2R\left[h_a + h_b + h_c - (h'_a + h'_b + h'_c)\right]. \end{aligned}$$

Or, les formules 11 et 20 nous donnent

$$h_a + h_b + h_c = \frac{bc + ca + ab}{2R}$$

$$h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r)\ ;$$

en remplaçant, on a

$$4(k_b k_c + k_c k_a + k_a k_b) = bc + ca + ab - 4R(R + r).$$

---

### Formule 24.

$$4(h_a k_a + h_b k_b + h_c k_c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

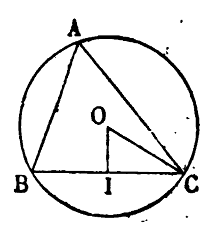
---

C'est la formule 13 où l'on a remplacé $h'_a$, $h'_b$ et $h'_c$ par leurs valeurs tirées de 18.

---

### Formule 25.

$$4(k_a^2 + k_b^2 + k_c^2) = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$




Dans le triangle rectangle OIC on a

$$4k_a^2 = 4R^2 - a^2,$$

$$4k_b^2 = 4R^2 - b^2,$$

$$4k_c^2 = 4R^2 - c^2.$$

En ajoutant membre à membre, on a la formule demandée.

**Formule 26.**

$$4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=\frac{abc}{k_ak_bk_c}.$$

On peut écrire cette formule, en chassant le dénominateur,

$$4(ak_bk_c+bk_ck_a+ck_ak_b)=abc.$$

Or $\qquad 4k_bk_c=h'_bh'_c=2\mathrm{R}h''_a. \qquad$ (18 et 15)

On a donc

$$4(ak_bk_c+bk_ck_a+ck_ak_b)=2\mathrm{R}[ah''_a+bh''_b+ch''_c].$$

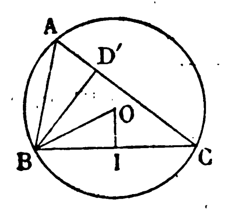
Mais $ah''_a+bh''_b+ch''_c$ est égal à 2S, en considérant l'aire du triangle ABC comme la somme des aires des triangles HBC, HCA et HAB. Le second membre de la relation devient donc 4RS ou $abc$, d'après 7.

---

**Formule 27.**

$$k_a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+k_b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+k_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=6\mathrm{R}.$$

Les triangles ABD′ et OBI sont semblables, car ils sont rectangles, et l'angle BOI qui a pour mesure la moitié de l'arc BC est égal à l'angle A du triangle ABC ; donc on a




$$\frac{\mathrm{AD'}}{c}=\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{R}},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{AD'}=\frac{ck_a}{\mathrm{R}}.$$

De même,

$$\mathrm{D'C}=\frac{ak_c}{\mathrm{R}};$$

en ajoutant,

$$\frac{ck_a + ak_c}{R} = b,$$

ou

$$\frac{c}{b} k_a + \frac{a}{b} k_c = R.$$

On obtient de la même manière les formules suivantes :

$$\frac{a}{c} k_b + \frac{b}{c} k_a = R,$$

$$\frac{b}{a} k_c + \frac{c}{a} k_b = R.$$

En ajoutant ces trois relations, on a la formule demandée.

La démonstration est supposée faite dans le cas où les trois angles sont aigus. On la modifierait aisément dans le cas d'un angle obtus, et on démontrerait que la formule subsiste avec les conventions de signe dont nous avons parlé au numéro **20.**

---

### Formule 28.

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

---

Dans le triangle ABI, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + 2BI \times ID.$$

Dans le triangle ACI,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{CI}^2 - 2CI \times ID.$$

En ajoutant, il vient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{CI}^2,$$

ou

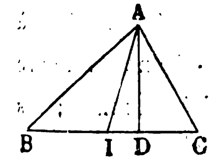
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\frac{a^2}{4};$$

on en tire

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

ou

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$



**Formule 29.**

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

De la formule 28 on déduit

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

On a de même

$$m_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2,$$

$$m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2.$$

Ajoutons ; il vient

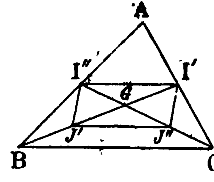
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{2}\left[2(a^2 + b^2 + c^2)\right] - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

**Formule 30.**

$$m'_a = 2m''_a.$$

Menons les médianes BI′ et CI″, qui se coupent en G, et joignons les milieux J′ et J″ des segments BG et CG.




Les droites I′I″ et J′J″, joignant les milieux de deux côtés dans les triangles ABC et GBC, sont parallèles à BC et égales à $\frac{BC}{2}$. Donc la figure I′I″J′J″ est un parallélogramme ; ses diagonales se coupent en parties égales ; donc

$$GI' = GJ' = \frac{BG}{2},$$

et la formule est établie.

Remarque. — On s'appuie sur cette propriété pour établir que dans un triangle les trois médianes sont concourantes.

En effet, nous démontrons que la médiane CI′ passe par le point G de la médiane BI′, tel que GB = 2GI′. Un raisonnement semblable servirait à démontrer que la médiane issue du point A passe par ce même point G.

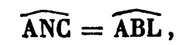
---

**Formule 31.**

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$$

---

Menons la bissectrice AL, qui rencontre le cercle circonscrit en N, milieu de l'arc BC. Les deux triangles ALB et ACN sont semblables, car ils ont les angles en A égaux et



$$\widehat{ANC} = \widehat{ABL},$$

comme ayant même mesure. Donc, on a

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AN}{AC},$$

ou $AB \times AC = AL \times AN = AL(AL + LN) = \overline{AL}^2 + AL \times LN.$

Or $$AL \times LN = BL \times LC;$$

donc $$AB \times AC = \overline{AL}^2 + BL \times LC,$$

ou $$\overline{AL}^2 = AB \times AC - BL \times LC.$$

Or, on a $$\frac{BL}{AB} = \frac{CL}{AC} = \frac{BC}{AB + AC};$$

on en tire

$$BL = \frac{ac}{b+c}, \qquad LC = \frac{ab}{b+c},$$

et la valeur de $\overline{AL}^2$ devient

$$\overline{AL}^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2},$$

$$l_a^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$$

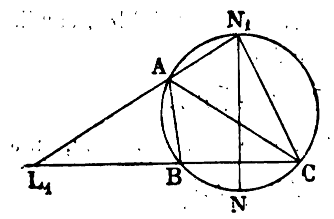
---

**Formule 32.**

$$l_{1a} = \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc}. \qquad (b>c)$$

---

Menons la bissectrice extérieure $AL_1$ de l'angle A ; elle rencontre le cercle circonscrit au point $N_1$, diamétralement opposé au point N. Les deux triangles $ACN_1$ et $ABL_1$ sont semblables ; en effet,




$$\widehat{N_1AC} = \widehat{BAL_1},$$

puisque $AL_1$ est bissectrice ; ensuite

$$\widehat{AN_1C} = \widehat{ABL_1},$$

comme étant supplémentaires de l'angle ABC. On a donc

$$\frac{AB}{AL_1} = \frac{AN_1}{AC},$$

ou $AB \times AC = AL_1 \times AN_1 = AL_1(L_1N_1 - AL_1) = AL_1 \times L_1N_1 - \overline{AL}_1^2.$

Or, $$AL_1 \times L_1N_1 = L_1B \times L_1C\,;$$

donc $$AB \times AC = L_1B \times L_1C - \overline{AL}_1^2,$$

ou $$\overline{AL}_1^2 = L_1B \times L_1C - AB \times AC.$$

Or, on a $$\frac{L_1B}{AB} = \frac{L_1C}{AC} = \frac{BC}{AC - AB}.$$

On en tire $L_1B = \frac{ac}{b-c}$, $L_1C = \frac{ab}{b-c}$,

et la valeur de $\overline{AL_1}^2$ devient

$$\overline{AL_1}^2 = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} - bc = \frac{bc[a^2-(b-c)^2]}{(b-c)^2},$$

$$l_{1a}^2 = \frac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(b-c)^2} = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2},$$

$$l_{1a} = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

---

**Formule 33.**

$$4b^2c^2 = l_a^2(b+c)^2 + l_{1a}^2(b-c)^2.$$

---

Remplaçons $l_a^2$ et $l_{1a}^2$ par leurs valeurs, déduites des formules 31 et 32 ; tout revient à démontrer la relation

$$4b^2c^2 = 4bcp(p-a) + 4bc(p-b)(p-c),$$

ou

$$bc = p(p-a) + (p-b)(p-c).$$

Or, $p(p-a)+(p-b)(p-c) = p^2 - ap + p^2 - p(b+c) + bc$

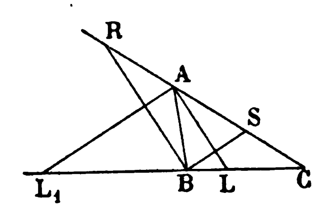
$$= 2p^2 - p(a+b+c) + bc = bc,$$

ce qui établit la formule.

Mais on peut aussi établir cette formule géométriquement sans calculer $l_a$, ni $l_{1a}$.

Menons par le point B des parallèles BR et BS aux deux bissectrices. Les triangles ABS et ABR sont isocèles, puisque les côtés BS et BR sont respectivement perpendiculaires aux bissectrices des angles opposés. Donc AB = AS = AR. Par suite

RS = $2c$, CS = $b-c$, CR = $b+c$.



Or, on a

$$\frac{BS}{AL_1} = \frac{CS}{CA}, \qquad \frac{BR}{AL} = \frac{CR}{CA}.$$

On en tire

$$BS = \frac{(b-c)l_{1a}}{b}. \qquad BR = \frac{(b+c)l_a}{b};$$

et dans le triangle rectangle SBR, on a

$$\overline{BS}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{RS}^2 = 4c^2.$$

En remplaçant dans cette relation BS et BR par leurs valeurs calculées, et chassant le dénominateur $b^2$, on obtient la formule demandée.

---

### Formule 34.

$$\frac{1}{al_al_{1a}} - \frac{1}{bl_bl_{1b}} + \frac{1}{cl_cl_{1c}} = 0. \qquad (a > b > c)$$

---

Dans le triangle rectangle $ALL_1$ on a, en égalant deux expressions de la surface,

$$AL \times AL_1 = LL_1 \times h_a.$$

Or,

$$LL_1 = BL + BL_1 = \frac{ac}{b+c} + \frac{ac}{b-c},$$

d'après les valeurs calculées aux numéros **31** et **32**;

donc

$$LL_1 = \frac{2abc}{b^2 - c^2},$$

et par suite

$$l_al_{1a} = \frac{2abch_a}{b^2 - c^2}.$$

On en tire

$$\frac{1}{al_al_{1a}} = \frac{b^2 - c^2}{2a^2bch_a} = \frac{b^2 - c^2}{4abcS},$$

et de même

$$\frac{1}{bl_b l_{1b}} = \frac{a^2 - c^2}{4abcS},$$

$$\frac{1}{cl_c l_{1c}} = \frac{a^2 - b^2}{4abcS}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{al_a l_{1a}} - \frac{1}{bl_b l_{1b}} + \frac{1}{cl_c l_{1c}} = 0.$$

---

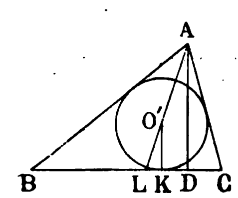
**Formule 35.**

$$al'^2_a + bl'^2_b + cl'^2_c = abc.$$

---

Menons la bissectrice AL, la hauteur AD et abaissons O'K perpendiculaire sur BC. On a

$$\frac{O'L}{O'K} = \frac{AL}{AD} = \frac{AO'}{AD - O'K},$$




ou

$$\frac{l'_a}{r} = \frac{l_a}{h_a} = \frac{l'_a}{h_a - r}. \qquad (A)$$

On en tire

$$l'_a = \frac{l_a(h_a - r)}{h_a} = l_a\left(1 - \frac{r}{h_a}\right).$$

Or, on a $\frac{r}{h_a} = \frac{a}{2p}$, puisque $2pr = ah_a = 2S$;

donc $$l'_a = l_a\left(1 - \frac{a}{2p}\right) = \frac{l_a(b+c)}{2p};$$

et en remplaçant $l_a$ par sa valeur (31), il vient

$$l'_a = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}.$$

On aura des expressions analogues pour $l'_b$ et $l'_c$, de telle sorte que

$$al'^2_a + bl'^2_b + cl'^2_c = \frac{abc}{p}\left[p - a + p - b + p - c\right] = abc.$$

**Formule 36.**

$$\frac{l'_a l'_b l'_c}{l''_a l''_b l''_c} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$$

De la relation (A) du numéro précédent on tire

$$\frac{l'_a}{l''_a} = \frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{2p}{a} - 1,$$

ou

$$\frac{l'_a}{l''_a} = \frac{b+c}{a};$$

de même,

$$\frac{l'_b}{l''_b} = \frac{c+a}{b},$$

$$\frac{l'_c}{l''_c} = \frac{a+b}{c}.$$

Multipliant membre à membre ces trois égalités, on a la formule demandée.

---

**Formule 37.**

$$\frac{l'_a l'_b l'_c}{r} = \frac{abc}{p}.$$

Nous avons obtenu dans le numéro 35

$$l'_a = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}.$$

On a de même

$$l'_b = \sqrt{\frac{(p-b)ca}{p}},$$

$$l'_c = \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}.$$

Faisons le produit :

$$l'_a l'_b l'_c = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2}{p^3}} = \frac{abc}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

ou, en tenant compte de **5**,

$$l'_a l'_b l'_c = \frac{abc}{p} r,$$

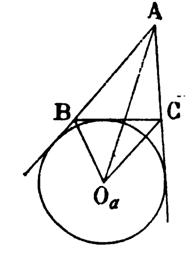
ou

$$\frac{l'_a l'_b l'_c}{r} = \frac{abc}{p}.$$

---

**Formule 38.**

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$




On a

$$\text{tr. ABC} = \text{tr. } O_aCA + \text{tr. } O_aAB - \text{tr.} O_aBC,$$

ou

$$S = \frac{r_a}{2}\left[b + c - a\right] = (p-a)r_a.$$

On en déduit

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

---

**Formule 39.**

$$Rr = \frac{abc}{4p}.$$

On a

$$R = \frac{abc}{4S}, \qquad (7)$$

$$r = \frac{S}{p}. \qquad (4)$$

En multipliant membre à membre, on a la formule demandée.

**Formule 40.**

$$Rr_a = \frac{abc}{4(p-a)}.$$

---

On a

$$R = \frac{abc}{4S}, \qquad (7)$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}. \qquad (38)$$

Multipliant membre à membre, on a la formule demandée.

---

**Formule 41.**

$$rr_a = (p-b)(p-c).$$

---

On a

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad (5)$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}. \qquad (38)$$

Il suffit de multiplier membre à membre.

---

**Formule 42.**

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}.$$

---

Cette formule résulte des relations

$$S = pr = (p-a)r_a. \qquad (4 \text{ et } 38)$$

### Formule 43.

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right).$$

Nous avons trouvé dans le numéro précédent

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a};$$

donc

$$\frac{r_a}{r} - 1 = \frac{p}{p-a} - 1 = \frac{a}{p-a};$$

de même

$$\frac{r_b}{r} - 1 = \frac{b}{p-b},$$

$$\frac{r_c}{r} - 1 = \frac{c}{p-c}.$$

En multipliant membre à membre, on a

$$\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right) = \frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4RS}{pr^2} \quad (7 \text{ et } 5)$$

$$= \frac{4R}{r}. \quad (4)$$

On en déduit la formule demandée.

### Formule 44.

$$r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2.$$

On a

$$r_b = \frac{S}{p-b}, \quad (38)$$

$$r_c = \frac{S}{p-c},$$

d'où $$r_b r_c = \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} = p(p-a);$$

de même, $$r_c r_a = p(p-b),$$
$$r_a r_b = p(p-c).$$

En ajoutant, il vient

$$\begin{aligned} r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b &= p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) \\ &= 3p^2 - p(a+b+c) = 3p^2 - 2p^2 = p^2. \end{aligned}$$

---

**Formule 45.**

$$\sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{r}} = p.$$

---

On a $$\frac{r_a r_b r_c}{r} = \frac{\frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}}{\frac{S}{p}} = \frac{pS^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = p^2.$$

---

**Formule 46.**

$$\sqrt{\frac{r r_b r_c}{r_a}} + \sqrt{\frac{r r_c r_a}{r_b}} + \sqrt{\frac{r r_a r_b}{r_c}} = p.$$

---

On a $$\frac{r r_b r_c}{r_a} = \frac{\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}}{\frac{S}{p-a}} = \frac{S^2(p-a)}{p(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{p(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-b)(p-c)} = (p-a)^2.$$

Donc
$$\sqrt{\frac{rr_b r_c}{r_a}} = p - a;$$

de même,
$$\sqrt{\frac{rr_c r_a}{r_b}} = p - b,$$

et
$$\sqrt{\frac{rr_a r_b}{r_c}} = p - c.$$

En ajoutant, on obtient la formule demandée.

---

### Formule 47.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

---

On a (38)
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

---

### Formule 48.

$$\frac{(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b)}{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b} = 4R.$$

---

On a
$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{S(2p-b-c)}{(p-b)(p-c)} = \frac{aS}{(p-b)(p-c)}.$$

On calcule de la même manière $r_c + r_a$ et $r_a + r_b$; en faisant le produit on obtient

$$(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b) = \frac{abcS^3}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}$$

$$= \frac{abcSp(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}$$

$$= \frac{abcpS}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abcS}{r^2} = \frac{abcpr}{r^2}$$

$$= \frac{abcp}{r}.$$

D'autre part, la formule 44 nous donne

$$r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = p^2.$$

On en déduit

$$\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b} = \frac{abc}{pr} = \frac{abc}{S} = 4R.$$

---

### Formule 49.

$$\left(\frac{a}{r^a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right) = 4.$$

---

On a

$$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c} = \frac{a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)}{S}$$

$$= \frac{p(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}{S} = \frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{S}.$$

D'autre part,

$$\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c} = \frac{2p}{\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}$$

$$= \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{S[(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)]}$$

$$= \frac{2S^2}{S[3p^2 - p(2a + 2b + 2c) + bc + ca + ab]}$$

$$= \frac{2S}{-p^2 + bc + ca + ab}.$$

On en déduit

$$\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a + b + c}{r_a + r_b + r_c}\right) = \frac{2[2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]}{-p^2 + bc + ca + ab}.$$

Or, il est aisé de voir que

$$\frac{2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{-p^2 + bc + ca + ab} = 2,$$

ou $4p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) = (a + b + c)^2$.

Donc
$$\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a + b + c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4.$$

---

## Formule 50.

$$a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{p}.$$

---

On a vu, au numéro 48, que

$$r_b + r_c = \frac{aS}{(p - b)(p - c)}.$$

On en déduit

$$\frac{r_a(r_b + r_c)}{p} = \frac{S}{(p - a)p} \cdot \frac{aS}{(p - b)(p - c)} = \frac{aS^2}{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$= \frac{aS^2}{S^2} = a.$$

**Formule 51.**

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

---

On a
$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{aS}{(p-b)(p-c)},$$
$$r_a - r = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{aS}{p(p-a)}.$$

Ajoutons membre à membre ; il vient

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= aS\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{p(p-a)}\right] \\ &= aS\frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= aS \cdot \frac{2p^2 - p(a+b+c) + bc}{S^2}. \\ &= \frac{abc}{S} = 4R. \qquad (7) \end{aligned}$$

On en déduit

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

On peut établir cette formule à l'aide de considérations géométriques, qui nous donneront en même temps quelques propriétés remarquables des cercles inscrit et exinscrits.

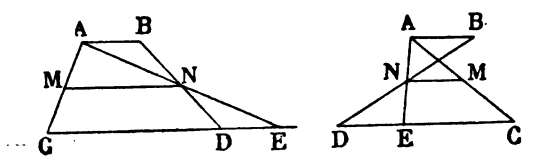
Nous ferons auparavant les deux remarques qui suivent.

1re Remarque. — *La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est égale à la demi-somme des bases si le trapèze est convexe et à leur demi-différence si le trapèze est concave.*

Soit MN la droite joignant les milieux des côtés non parallèles AC et BD.

Tirons AN, qui rencontre CD au point E. Les deux triangles ABN et NDE sont égaux, car les deux côtés égaux BN et ND sont adjacents à des angles égaux ; donc AB = DE.

Par suite, si le trapèze est convexe, CE est égal à la somme des bases ; si le trapèze est concave, CE est égal à la diffé-




rence des bases ; et comme MN est la moitié de CE, le théorème est démontré.

2e Remarque. — *La longueur de la tangente issue d'un des sommets* A, B, C *à l'un des cercles* O′, $O_a$, $O_b$, $O_c$ *est obtenue en prenant dans le tableau ci-dessous le nombre qui se trouve à la fois dans la colonne horizontale placée en face du sommet d'où l'on mène la tangente et dans la colonne verticale placée au-dessous du centre du cercle auquel on mène la tangente.*

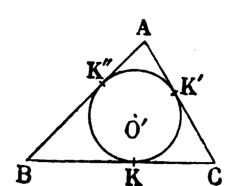
| | O′ | $O_a$ | $O_b$ | $O_c$ |
|---|---|---|---|---|
| A | $p-a$ | $p$ | $p-c$ | $p-b$ |
| B | $p-b$ | $p-c$ | $p$ | $p-a$ |
| C | $p-c$ | $p-b$ | $p-a$ | $p$ |

Nous nous appuierons sur ce que les tangentes issues d'un point à un cercle ont même longueur.

Considérons d'abord le cercle inscrit O′. On a

$$AK'+AK''=AB+AC-BK''-CK'=2p-2(BK+CK)=2p-2a,$$

ou




$$2AK' = 2p-2a,$$

$$AK' = p-a = AK''.$$

On verrait de même que

$$BK'' = BK = p-b,$$

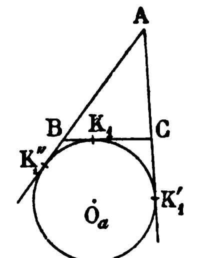
$$CK' = CK = p-c.$$

Pour le cercle exinscrit $O_a$, on a d'abord

$$AK'_1 + AK''_1 = AB + BK''_1 + AC + CK'_1 = AB + AC + BK_1 + CK_1,$$

$$2AK'_1 = 2p,$$

$$AK'_1 = AK''_1 = p.$$




En outre,

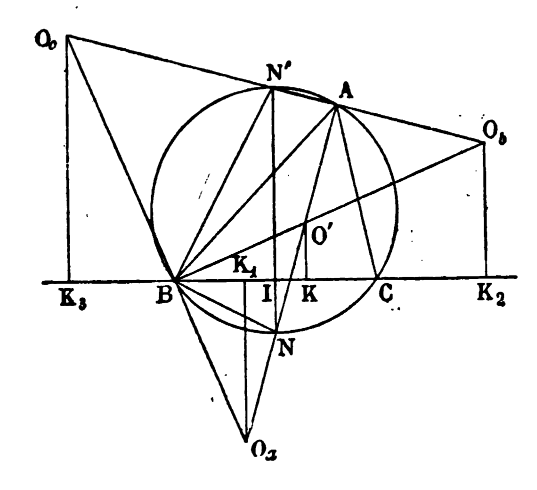
$$BK_1 = BK''_1 = AK''_1 - AB = p - c,$$

et

$$CK_1 = CK'_1 = AK'_1 - AC = p - b.$$

La démonstration est la même pour les autres cercles exinscrits.

Il résulte de la 2ᵉ remarque que $BK_1 = CK = p - c$ et $CK_2 = BK_3 = p - a$ ; par conséquent le point I, milieu




de BC, est aussi le milieu de $KK_1$ et de $K_2K_3$. Dès lors, la droite NN′, perpendiculaire à BC au point I, rencontre les droites $O'O_a$ et $O_bO_c$ en leurs milieux, qui se trouvent être ainsi les points N et N′.

On a donc $O'N = O_aN$ et $O_bN' = O_cN'$.

Mais, d'après la première remarque, en considérant le trapèze

concave $O'KO_aK_1$, on a

$$IN = \frac{O_aK_1 - O'K}{2} = \frac{r_a - r}{2}.$$

De même, dans le trapèze convexe $O_bK_2O_cK_3$, on a

$$IN' = \frac{O_bK_2 + O_cK_3}{2} = \frac{r_b + r_c}{2}.$$

En ajoutant, il vient

$$IN + IN' = 2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2},$$

ou

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

C'est la formule demandée.

Remarquons que le triangle $O'BO_a$ est rectangle ; BN étant une médiane, est égale à la moitié de l'hypoténuse ; donc

$$BN = NO' = NO_a.$$

De même dans le triangle rectangle $O_bBO_c$, BN' étant médiane, on a

$$BN' = N'O_b = N'O_c.$$

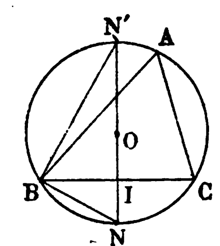
---

**Formule 52.**

$$k_a = \frac{r + r_b + r_c - r_a}{4}.$$

---

On a $k_a = OI = \dfrac{IN' - IN}{2}$.




Or, dans le numéro précédent, nous avons démontré que

$$IN' = \frac{r_b + r_c}{2},$$

$$IN = \frac{r_a - r}{2}.$$

En prenant la demi-différence, il vient

$$k_a = \frac{IN' - IN}{2} = \frac{r + r_b + r_c - r_a}{4}.$$

Cette formule subsiste même si $k_a$ est négatif.

**Formule 53.**

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c).$$

On a (fig. précédente)

$$\overline{BI}^2 = IN \times IN',$$

ou

$$\frac{a^2}{4} = \frac{r_a - r}{2} \cdot \frac{r_b + r_c}{2}, \qquad (51)$$

ou

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c).$$

**Formule 54.**

$$a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r).$$

Dans le triangle rectangle BNN′, on a (fig. précédente)

$$\overline{BN}^2 = NI \times NN'.$$

Or,

$$\overline{BN}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{IN}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(r_a - r)^2}{4}; \qquad (51)$$

donc

$$a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r).$$

**Formule 55.**

$$r_a r_b - r r_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

En tenant compte de la formule 38, on a

$$r_a r_b - r r_c = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} - \frac{S^2}{p(p-c)}$$

$$= \frac{S^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \left[p(p-c) - (p-a)(p-b)\right]$$

$$= p(a+b-c) - ab$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

**Formule 56.**

$$a^2+b^2+c^2+r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=16R^2.$$

On a

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2=(r_a+r_b+r_c)^2-2(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b),$$

ou, en tenant compte des formules **51** et **44**,

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2=(4R+r)^2-2p^2.$$

Ajoutons cette relation à la formule 9 membre à membre; on a la formule à établir.

**Formule 57.**

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}.$$

Remplaçons dans le premier membre $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ par leurs valeurs $\frac{S}{p}$, $\frac{S}{p-a}$, $\frac{S}{p-b}$, $\frac{S}{p-c}$; il vient

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{S^2}$$

$$=\frac{4p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2}{S^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}.$$

**Formule 58.**

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

On a

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

**Formule 59.**

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}.$$

En effet,

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} - \frac{a}{2S} = \frac{2(p-a)}{2S} = \frac{p-a}{S} = \frac{1}{r_a}.$$

**Formule 60.**

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_a}.$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{p}{S} - \frac{p-a}{S} = \frac{a}{S} = \frac{2}{h_a}.$$

**Formule 61.**

$$\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6.$$

Le premier membre peut s'écrire

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) - \left(\frac{h_a}{r_a} + \frac{h_b}{r_b} + \frac{h_c}{r_c}\right).$$

Or on a

$$h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

et

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}; \tag{47}$$

donc, en multipliant,

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = 2p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{A}$$

D'autre part,

$$\frac{h_a}{r_a} = \frac{2(p-a)}{a} = 2\left(\frac{p}{a} - 1\right),$$

puisque

$$ah_a = 2r_a(p-a) = 2S.$$

Donc on peut écrire

$$\frac{h_a}{r_a} + \frac{h_b}{r_b} + \frac{h_c}{r_c} = 2p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 6. \tag{B}$$

En retranchant la relation (B) de la relation (A) membre à membre, on obtient

$$\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6.$$

---

### Formule 62.

$$\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}.$$

---

Remplaçons $r_a r_b r_c$ par sa valeur $p^2 r$ tirée de la formule 45, et $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b$ par sa valeur $p^2$ tirée de la formule 44; la formule à établir peut s'écrire

$$\frac{p^2 r}{h_a h_b h_c} = \frac{p^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b},$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

C'est la formule 58.

**Formule 63.**

$$r^3 = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c.$$

On a

$$2S = 2pr = ah_a,$$

d'où

$$r = \frac{ah_a}{2p};$$

et de même

$$r = \frac{bh_b}{2p},$$

$$r = \frac{ch_c}{2p}.$$

En multipliant membre à membre, on a

$$r^3 = \frac{abch_a h_b h_c}{(2p)^3} = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c.$$

**Formule 64.**

$$\frac{R}{2r} = \frac{p^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}.$$

On a

$$h_b h_c = \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = \frac{4S^2}{bc}.$$

Donc

$$h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b = 4S^2\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{4S^2}{abc}\left(a+b+c\right)$$

$$= \frac{8S^2p}{abc} = \frac{8S^2p}{4RS} = \frac{2pS}{R}.$$

On en déduit

$$\frac{p^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b} = \frac{pR}{2S} = \frac{R}{2r}.$$

### Formule 65.

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 4R^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2.$$

De la formule 56 on tire

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

De la formule 25, en tenant compte de 18, on tire

$$h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En retranchant ces deux relations membre à membre, on obtient la formule demandée.

### Formule 66.

$$2R = \frac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}.$$

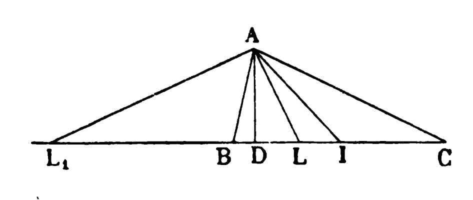
Menons la hauteur, la bissectrice et la médiane du triangle ABC ; on voit que

$$m_a^2 - h_a^2 = \overline{AI}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{DI}^2,$$

$$l_a^2 - h_a^2 = \overline{AL}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{DL}^2 ;$$

donc tout revient à démontrer que

$$2R = \frac{\overline{AL}^2}{AD} \times \frac{DI}{DL}.$$




Or si l'on mène la bissectrice extérieure $AL_1$, on a dans le triangle rectangle $ALL_1$,

$$\frac{\overline{AL}^2}{DL} = LL_1 = \frac{2abc}{b^2 - c^2}. \qquad (34)$$

D'autre part, on obtient sans peine la valeur de DI en retran-

chant les deux égalités suivantes :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2 + 2IC.DI,$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IB}^2 - 2IB.DI,$$

ce qui donne

$$b^2 - c^2 = 2a \times DI,$$

ou

$$DI = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

On aura donc

$$\frac{\overline{AL}^2}{AD} \times \frac{DI}{DL} = \frac{1}{AD} \times \frac{2abc}{b^2 - c^2} \times \frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{bc}{h_a} = \frac{abc}{ah_a} = \frac{4RS}{2S} = 2R.$$

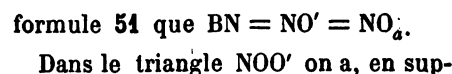
---

**Formule 67.**

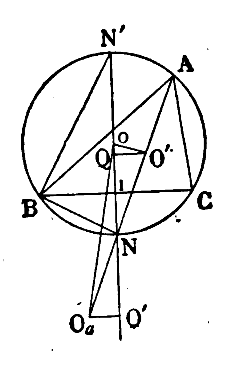
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

---

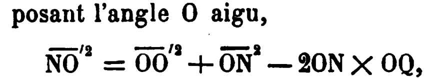
Tirons OO′ et abaissons O′Q perpendiculaire sur le diamètre NN′ du cercle circonscrit qui passe par le milieu I de BC.



Nous avons démontré en établissant la formule 51 que $BN = NO' = NO_a$.




Dans le triangle NOO′ on a, en supposant l'angle O aigu,



$$\overline{NO'}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{ON}^2 - 2ON \times OQ,$$

ou

$$\overline{BN}^2 = d^2 + R^2 - 2R(OI - r).$$

Mais dans le triangle rectangle BNN′ on a

$$\overline{BN}^2 = NI \times NN' = NI \times 2R;$$

donc

$$NI \times 2R = d^2 + R^2 - 2R(OI - r),$$

$$2R(NI + OI) = d^2 + R^2 + 2Rr,$$

$$2R^2 = d^2 + R^2 + 2Rr,$$

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

On serait conduit au même résultat si l'angle O était obtus.

### Formule 68.

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Abaissons $O_aQ'$ perpendiculaire sur NN' (fig. précédente) et joignons les points O et $O_a$. Dans le triangle $NOO_a$ on a

$$\overline{NO_a}^2 = \overline{OO_a}^2 + \overline{NO}^2 - 2NO \times OQ',$$

et comme $BN = NO_a$ (voir la démonstration de la formule 51),

$$\overline{BN}^2 = \overline{OO_a}^2 + \overline{NO}^2 - 2NO \times OQ'.$$

Or $$\overline{BN}^2 = NI \times NN' = 2R \times NI.$$

Donc $$2R \times NI = d_a^2 + R^2 - 2R(OI + r_a).$$

$$2R(OI + IN) = d_a^2 + R^2 - 2Rr_a,$$

$$2R^2 = d_a^2 + R^2 - 2Rr_a,$$

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Les formules 67 et 68 sont appelées formules d'Euler.

---

### Formule 69.

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2.$$

Les formules 67 et 68 nous donnent

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a,$$

$$d_b^2 = R^2 + 2Rr_b,$$

$$d_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

En ajoutant, on a

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r).$$

D'après la formule 51, le coefficient de 2R est égal à 4R.

On a donc

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2.$$

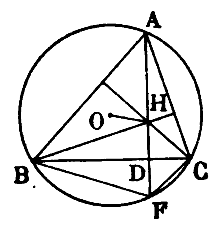
---

### Formule 70.

$$3(d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4\overline{OH}^2.$$

---

En tenant compte de la formule 69, la formule à établir peut s'écrire




$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

La puissance du point H par rapport au cercle circonscrit est égale au produit HA × HF et aussi à $R^2 - \overline{OH}^2$, en supposant le point H intérieur au cercle. On a donc

$$R^2 - \overline{OH}^2 = HA \times HF.$$

Or nous avons vu (15) que les triangles BHC et BFC sont égaux ; donc

$$DF = HD = h_a'';$$

par suite

$$R^2 - \overline{OH}^2 = 2h_a'h_a'',$$

ou

$$R^2 - \overline{OH}^2 = 2h_a'(h_a - h_a').$$

On a de même

$$R^2 - \overline{OH}^2 = 2h_b'(h_b - h_b'),$$

$$R^2 - \overline{OH}^2 = 2h_c'(h_c - h_c').$$

En ajoutant, il vient

$$3(R^2 - \overline{OH}^2) = 2(h_ah_a' + h_bh_b' + h_ch_c') - 2(h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2).$$

Or, on a

$$2(h_ah_a' + h_bh_b' + h_ch_c') = a^2 + b^2 + c^2, \qquad (13)$$

$$h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2); \qquad (25)$$

donc, en remplaçant, il vient

$$3(R^2 - \overline{OH}^2) = a^2 + b^2 + c^2 - 2[12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$
$$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 24R^2,$$

d'où l'on tire

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

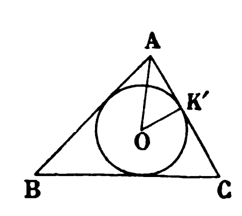
---

**Formule 71.**

$$\overline{AO'}^2 = \frac{p-a}{p} bc.$$

---

Dans le triangle rectangle AO'K', on a




$$\overline{AO'}^2 = \overline{AK'}^2 + \overline{O'K'}^2,$$

ou

$$\overline{AO'}^2 = (p-a)^2 + r^2,$$

car nous avons montré dans le numéro 51 (2e remarque) que $AK' = p - a$.

Or,

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}; \quad (5)$$

donc

$$\overline{AO'}^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$
$$= (p-a)\left[p - a + \frac{(p-b)(p-c)}{p}\right]$$
$$= \frac{(p-a)[p(p-a) + (p-b)(p-c)]}{p}$$
$$= \frac{(p-a)[2p^2 - p(a+b+c) + bc]}{p} = \frac{(p-a)bc}{p}.$$

---

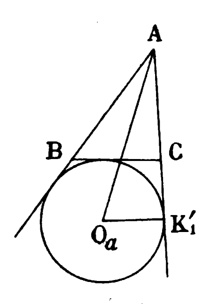
### Formule 72.

$$\overline{AO_a}^2 = \frac{p}{p-a} bc.$$

Dans le triangle rectangle $AO_aK'_1$, on a

$$\overline{AO_a}^2 = \overline{AK'_1}^2 + \overline{O_aK'_1}^2 = p^2 + r_a^2, \qquad (51)$$

$$r_a^2 = \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}, \qquad (38)$$




$$\overline{AO_a}^2 = p^2 + \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}$$

$$= \frac{p[p(p-a)+(p-b)(p-c)]}{p-a}$$

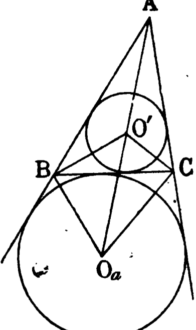
$$= \frac{p[2p^2 - p(a+b+c) + bc]}{p-a}$$

$$= \frac{p}{p-a} bc.$$

### Formule 73.

$$AO'.AO_a = bc.$$

Il suffit de multiplier membre à membre les formules 71 et 72 et d'extraire la racine carrée.




On peut aussi établir directement cette relation en remarquant que le quadrilatère $O'BO_aC$ est inscriptible. Donc

$$CO_aO' = CBO' = O'BA.$$

Les deux triangles $ABO'$ et $AO_aC$ sont alors semblables, comme ayant deux angles égaux, les angles en A et $\widehat{O'BA} = \widehat{CO_aO'}$.

Donc on peut écrire

$$\frac{AB}{AO'} = \frac{AO_a}{AC},$$

ou

$$AO' \times AO_a = bc.$$

---

**Formule 74.**

$$\frac{CO'.CO_c}{BO'.BO_b} = \frac{b}{c}.$$

---

D'après la formule 73, on a

$$CO'.CO_c = ab,$$
$$BO'.BO_b = ac,$$

et il suffit de diviser membre à membre.

---

**Formule 75.**

$$\overline{AO'}^2 + \overline{BO'}^2 + \overline{CO'}^2 = bc + ca + ab - 12Rr.$$

---

La formule 71 nous donne

$$\overline{AO'}^2 = \frac{p-a}{p} bc = \left(1 - \frac{a}{p}\right) bc,$$

$$\overline{BO'}^2 = \frac{p-b}{p} ca = \left(1 - \frac{b}{p}\right) ca,$$

$$\overline{CO'}^2 = \frac{p-c}{p} ab = \left(1 - \frac{c}{p}\right) ab;$$

en ajoutant, on a

$$\overline{AO'}^2 + \overline{BO'}^2 + \overline{CO'}^2 = bc + ca + ab - \frac{3abc}{p}.$$

Or,

$$abc = 4RS; \tag{7}$$

donc
$$\frac{3abc}{p} = \frac{12RS}{p} = 12Rr.$$

Il vient alors

$$\overline{AO'}^2 + \overline{BO'}^2 + \overline{CO'}^2 = bc + ca + ab - 12Rr.$$

---

### Formule 76.

$$\frac{\overline{AO'}^2}{bc} + \frac{\overline{BO'}^2}{ca} + \frac{\overline{CO'}^2}{ab} = 1.$$

---

La formule 71 nous donne

$$\frac{\overline{AO'}^2}{bc} = \frac{p-a}{p} = 1 - \frac{a}{p};$$

de même,

$$\frac{\overline{BO'}^2}{ca} = 1 - \frac{b}{p},$$

$$\frac{\overline{CO'}^2}{ab} = 1 - \frac{c}{p};$$

en ajoutant, il vient

$$\frac{\overline{AO'}^2}{bc} + \frac{\overline{BO'}^2}{ca} + \frac{\overline{CO'}^2}{ab} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 3 - \frac{2p}{p} = 1.$$

---

### Formule 77.

$$\frac{bc}{\overline{AO}_a^2} + \frac{ca}{\overline{BO}_b^2} + \frac{ab}{\overline{CO}_c^2} = 1.$$

---

La formule 72 donne

$$\overline{AO}_a^2 = \frac{p}{p-a} bc;$$

donc

$$\frac{bc}{\overline{AO}_a^2} = \frac{p-a}{p} = 1 - \frac{a}{p};$$

de même,

$$\frac{ca}{\overline{BO}_b^2} = 1 - \frac{b}{p},$$

$$\frac{ab}{\overline{CO}_c^2} = 1 - \frac{c}{p}.$$

En ajoutant, il vient

$$\frac{bc}{\overline{AO}_a^2} + \frac{ca}{\overline{BO}_b^2} + \frac{ab}{\overline{CO}_c^2} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 1.$$

---

### Formule 78.

$$AO'.BO'.CO' = 4Rr^2$$

---

La formule 71 nous donne

$$\overline{AO'}^2 = \frac{p-a}{p}\,bc.$$

On a de même

$$\overline{BO'}^2 = \frac{p-b}{p}\,ca,$$

$$\overline{CO'}^2 = \frac{p-c}{p}\,ab,$$

En faisant le produit membre à membre, il vient

$$\overline{AO'}^2.\overline{BO'}^2.\overline{CO'}^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)\,a^2b^2c^2}{p^3}. \qquad \text{(A)}$$

Or,

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = r^2,$$

et

$$abc = 4RS = 4Rrp.$$

En remplaçant, le deuxième membre de l'égalité (A) devient

$$\frac{r^2.16R^2r^2p^2}{p^2} = 16R^2r^4$$

et, en extrayant la racine, on a la formule demandée.

---

**Formule 79.**

$$AO_a.BO_a.CO_a = 4Rr_a^2.$$

---

La formule 72 nous donne

$$\overline{AO}_a^2 = \frac{p}{p-a}\,bc.$$

D'autre part, dans le triangle rectangle $BO_aK_1$, on a

$$\overline{BO}_a^2 = \overline{O_aK}_1^2 + \overline{BK}_1^2 = r_a^2 + (p-c)^2$$

$$= \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} + (p-c)^2$$

$$= \frac{(p-c)[p(p-b)+(p-a)(p-c)]}{p-a}$$

$$= \frac{(p-c)[2p^2 - p(a+b+c)+ac]}{p-a}$$

$$= \frac{(p-c)ac}{p-a}.$$

On aura de même

$$\overline{CO}_a^2 = \frac{(p-b)ab}{p-a},$$

d'où l'on déduit

$$\overline{AO}_a^2.\overline{BO}_a^2.\overline{CO}_a^2 = \frac{p(p-b)(p-c)a^2b^2c^2}{(p-a)^3} = \frac{r_a^2a^2b^2c^2}{(p-a)^2},$$

ou

$$AO_a.BO_a.CO_a = \frac{r_a.abc}{p-a} = \frac{r_a.4RS}{p-a}$$

$$= 4Rr_a^2.$$

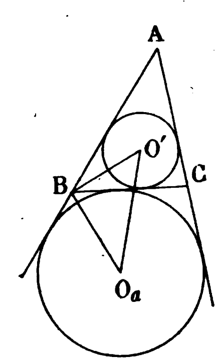
**Formule 80.**

$$O'O_a . O'O_b . O'O_c = 16R^2 r.$$

---

Dans le triangle rectangle $BO'O_a$ on a

$$\overline{O'O_a}^2 = \overline{BO'}^2 + \overline{BO_a}^2.$$




La formule 71 donne

$$\overline{BO'}^2 = \frac{p-b}{p} ca,$$

et nous avons trouvé au numéro 79

$$\overline{BO_a}^2 = \frac{(p-c)ac}{p-a}.$$

Donc $$\overline{O'O_a}^2 = \frac{p-b}{p} ac + \frac{p-c}{p-a} ac$$

$$= \frac{(p-b)(p-a) + p(p-c)}{p(p-a)} ac$$

$$= \frac{a^2bc}{p(p-a)};$$

de même,

$$\overline{O'O_b}^2 = \frac{b^2ca}{p(p-b)},$$

$$\overline{O'O_c}^2 = \frac{c^2ab}{p(p-c)}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\overline{O'O_a}^2 . \overline{O'O_b}^2 . \overline{O'O_c}^2 = \frac{a^4b^4c^4}{p^3(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^4b^4c^4}{p^2S^2},$$

ou

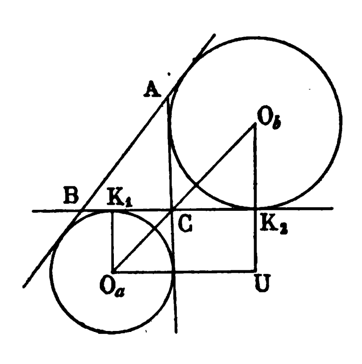
$$O'O_a . O'O_b . O'O_c = \frac{a^2b^2c^2}{pS} = \frac{16R^2S^2}{pS} = \frac{16R^2S}{p} = 16R^2r.$$

---

### Formule 81.

$$\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2.$$

Menons par le point $O_b$ une perpendiculaire à BC et par le point $O_a$ une parallèle à BC; ces deux droites se coupent en un point U, et dans le triangle rectangle $O_aO_bU$, on a




$$\overline{O_aO_b}^2 = \overline{O_bU}^2 + \overline{O_aU}^2.$$

Or,

$$O_bU = r_a + r_b,$$

$$O_aU = K_1K_2 = K_1C + CK_2.$$

Mais $K_1$ et $K_2$ sont les points de contact des cercles exinscrits; donc, d'après la 2ᵉ remarque du numéro **51**,

$$K_1C = p - b, \quad K_2C = p - a;$$

donc

$$K_1K_2 = 2p - a - b = c.$$

Il en résulte

$$O_aU = c,$$

et

$$\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2.$$

---

### Formule 82.

$$\overline{O_bO_c}^2 + \overline{O_cO_a}^2 + \overline{O_aO_b}^2 = 8R(r_a + r_b + r_c).$$

La formule **81** nous donne

$$\overline{O_bO_c}^2 = (r_b + r_c)^2 + a^2,$$

$$\overline{O_cO_a}^2 = (r_c + r_a)^2 + b^2,$$

$$\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2.$$

Ajoutons, il vient

$$\overline{O_bO_c}^2 + \overline{O_cO_a}^2 + \overline{O_aO_c}^2 = 2(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) + 2(r_br_c + r_cr_a + r_ar_b) + a^2 + b^2 + c^2.$$

Or, de la formule **56** on tire

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 - r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

et de **44**

$$r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = p^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\overline{O_bO_c}^2 + O_cO_a^2 + \overline{O_aO_c}^2 \\ &= 32R^2 - 2r^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2p^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 32R^2 - 2r^2 + 2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2); \end{aligned}$$

et comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr, \qquad (9)$$

on a

$$\begin{aligned} \overline{O_bO_c}^2 + \overline{O_cO_a}^2 + \overline{O_aO_c}^2 &= 32R^2 - 2r^2 + 2p^2 - 2p^2 + 2r^2 + 8Rr \\ &= 8R(4R + r) = 8R(r_a + r_b + r_c). \qquad (51) \end{aligned}$$

---

## Formule 83.

$$O_bO_c \cdot O_cO_a \cdot O_aO_b = 16R^2p.$$

On a (81)

$$\begin{aligned} \overline{O_aO_b}^2 &= (r_a + r_b)^2 + c^2 \\ &= \left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b}\right)^2 + c^2 \\ &= \frac{S^2(2p - a - b)^2}{(p-a)^2(p-b)^2} + c^2 \\ &= \frac{S^2 + (p-a)^2(p-b)^2}{(p-a)^2(p-b)^2}\, c^2 \\ &= \frac{p(p-c) + (p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)}\, c^2 \\ &= \frac{abc^2}{(p-a)(p-b)}. \end{aligned}$$

On a de même

$$\overline{O_bO_c}^2 = \frac{bca^2}{(p-b)(p-c)},$$

$$\overline{O_cO_a}^2 = \frac{cab^2}{(p-c)(p-a)}.$$

D'où, en faisant le produit,

$$\overline{O_bO_c}^2 \cdot \overline{O_cO_a}^2 \cdot \overline{O_aO_b}^2 = \frac{a^4b^4c^4}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2},$$

$$O_bO_c \cdot O_cO_a \cdot O_aO_b = \frac{a^2b^2c^2}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{16R^2S^2}{\frac{S^2}{p}} = 16R^2p.$$

---

**Formule 84.**

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

---

De la formule **70** on tire

$$4\overline{OH}^2 = 3(d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) - 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

En remplaçant $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$ par sa valeur tirée de la formule **69**, il vient

$$4\overline{OH}^2 = 36R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2),$$

ou

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

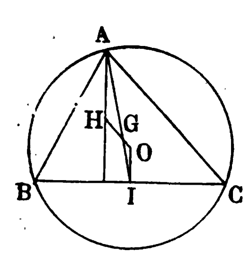
---

**Formule 85.**

$$\overline{GO}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

---

Nous avons établi au numéro **18** que $AH = 2OI$. Menons




la droite AI, qui rencontre HO au point G. Les deux triangles GOI et GAH sont semblables, comme ayant les angles égaux; par suite, OI étant la moitié de AH, GI sera la moitié de GA, ce qui prouve d'abord que le point G est bien le point de concours des médianes et en outre que GO est la moitié de HG.

On a donc
$$GO = \frac{HO}{3},$$
ce qui permet de déduire la formule 85 de la formule 84.

Remarque. — On déduit des considérations qui précèdent le théorème suivant, dû à Euler :

*Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit, le point de concours des médianes et celui des hauteurs sont en ligne droite.*

*La distance des deux derniers points est double de celle des deux premiers.*

---

### Formule 86.

$$\overline{GO'}^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}.$$

---

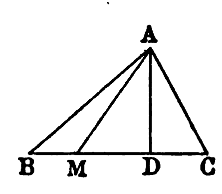
Avant de démontrer cette formule nous établirons une formule remarquable, qui nous sera fort utile dans cette question et dans les suivantes.

Problème. — *On donne un triangle* ABC, *un point* M *sur le côté* BC, *situé entre* B *et* C, *et tel que*

$$\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n},$$

m *et* n *étant des nombres positifs donnés.*

*Calculer la longueur* AM *en fonction des côtés du triangle et des nombres* m *et* n.




On a les égalités

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2BM \times MD,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2MC \times MD.$$

Éliminons MD, en multipliant la première relation par $n$, la deuxième par $m$, et ajoutant membre à membre. Le coefficient de MD est $n\text{BM} - m\text{MC}$, qui est nul en vertu de l'hypothèse. On a donc

$$n.\overline{AB}^2 + m.\overline{AC}^2 = (m+n)\overline{AM}^2 + n.\overline{BM}^2 + m.\overline{MC}^2.$$

Or, remarquons que

$$\frac{BM}{m} = \frac{MC}{n} = \frac{BC}{m+n};$$

donc

$$BM = \frac{m.BC}{m+n}, \qquad MC = \frac{n.BC}{m+n};$$

par suite,

$$n.\overline{BM}^2 + m.\overline{MC}^2 = \frac{(m^2n + mn^2)\overline{BC}^2}{(m+n)^2} = \frac{mn.\overline{BC}^2}{m+n}.$$

On a donc

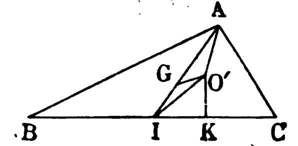
$$n.\overline{AB}^2 + m.\overline{AC}^2 = (m+n)\overline{AM}^2 + \frac{mn.\overline{BC}^2}{m+n},$$

ou

$$\overline{AM}^2 = \frac{n}{m+n}\overline{AB}^2 + \frac{m}{m+n}\overline{AC}^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}\overline{BC}^2.$$

La question est ainsi résolue.

Joignons maintenant le point O′ au point G. Dans le triangle AO′I on pourra calculer GO′ d'après la formule précédente, puisque




$$\frac{GI}{GA} = \frac{1}{2}.$$

On aura

$$\overline{GO'}^2 = \frac{1}{3}\overline{AO'}^2 + \frac{2}{3}\overline{IO'}^2 - \frac{2}{9}\overline{AI}^2.$$

Or, nous avons trouvé (71)

$$\overline{AO'}^2 = \frac{p-a}{p} bc.$$

D'autre part,

$$\overline{IO'}^2 = \overline{O'K}^2 + \overline{IK}^2 = r^2 + (IC - KC)^2$$

$$= r^2 + \left[\frac{a}{2} - (p-c)\right]^2$$

$$= r^2 + \frac{(b-c)^2}{4}.$$

Enfin,

$$\overline{AI}^2 = m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (28)$$

On aura donc

$$\overline{GO'}^2 = \frac{1}{3}\frac{p-a}{p} bc + \frac{2}{3}\left[r^2 + \frac{(b-c)^2}{4}\right] - \frac{2}{9}\left[\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{bc}{3} - \frac{abc}{3p} + \frac{2}{3}r^2 + \frac{(b-c)^2}{6} - \frac{b^2+c^2}{9} + \frac{a^2}{18}.$$

En réduisant les trois derniers termes du deuxième membre, on a

$$\frac{(b-c)^2}{6} - \frac{b^2+c^2}{9} + \frac{a^2}{18} = \frac{3(b-c)^2 - 2(b^2+c^2) + a^2}{18}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{18} - \frac{bc}{3}.$$

Donc

$$\overline{GO'}^2 = -\frac{abc}{3p} + \frac{2}{3}r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$$

$$= -\frac{4RS}{3p} + \frac{2}{3}r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$$

$$= -\frac{4Rr}{3} + \frac{2}{3}r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18};$$

et comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr, \qquad (9)$$

on aura

$$\overline{GO'}^2 = -\frac{4Rr}{3} + \frac{2}{3}r^2 + \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{9}$$

$$= \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}.$$

Remarque. — On peut aussi écrire cette formule

$$\overline{GO'}^2 = \frac{5}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{1}{6}\left(bc + ca + ab\right) + r^2.$$

On le voit aisément en s'appuyant sur les formules (8) et (9).

---

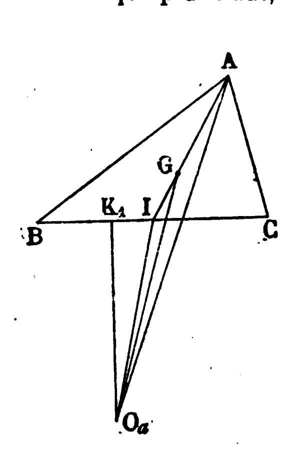
**Formule 87.**

$$\overline{GO}_a^2 = \frac{1}{9}\left[p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)\right].$$

---

Dans le triangle $AO_aI$ on a, par suite des mêmes considérations que plus haut,

$$\overline{GO}_a^2 = \frac{1}{3}\overline{AO}_a^2 + \frac{2}{3}\overline{IO}_a^2 - \frac{2}{9}\overline{AI}^2.$$




Or, la formule **72** nous donne

$$\overline{AO}_a^2 = \frac{p}{p-a}bc.$$

En outre,

$$\overline{IO}_a^2 = \overline{O_aK}_1^2 + \overline{IK}_1^2 = r_a^2 + (IB - BK_1)^2$$
$$= r_a^2 + \left[\frac{a}{2} - (p-c)\right]^2$$
$$= r_a^2 + \frac{(b-c)^2}{4};$$

et

$$\overline{AI}^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \quad (28)$$

On aura donc

$$\overline{GO}_a^2 = \frac{1}{3}\frac{p}{p-a}\cdot bc + \frac{2}{3}\left[r_a^2 + \frac{(b-c)^2}{4}\right] - \frac{2}{9}\left[\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right],$$

qui peut s'écrire, comme dans le numéro précédent,

$$\overline{GO}_a^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p-a}bc + \frac{2}{3}r_a^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18} - \frac{bc}{3}.$$

Or,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p-a}bc-\frac{bc}{3}=\frac{abc}{3(p-a)}=\frac{4RS}{3(p-a)}=\frac{4Rr_a}{3}.$$

Donc

$$\overline{GO}_a^2=\frac{4Rr_a}{3}+\frac{2}{3}r_a^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{18},$$

ou, en tenant compte de 9,

$$\overline{GO}_a^2=\frac{4Rr_a}{3}+\frac{2}{3}r_a^2+\frac{p^2-r^2-4Rr}{9}$$
$$=\frac{p^2+6r_a^2-r^2+4R(3r_a-r)}{9}.$$

---

## Formule 88.

$$\overline{GO'}^2+\overline{GO}_a^2+\overline{GO}_b^2+\overline{GO}_c^2=16R^2-\frac{4}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

---

Les formules 86 et 87 nous donnent

$$\overline{GO'}^2=-\frac{4Rr}{3}+\frac{2}{3}r^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{18},$$

$$\overline{GO}_a^2=\frac{4Rr_a}{3}+\frac{2}{3}r_a^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{18},$$

$$\overline{GO}_b^2=\frac{4Rr_b}{3}+\frac{2}{3}r_b^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{18},$$

$$\overline{GO}_c^2=\frac{4Rr_c}{3}+\frac{2}{3}r_c^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{18}.$$

En ajoutant membre à membre, on a

$$\overline{GO'}^2+\overline{GO}_a^2+\overline{GO}_b^2+\overline{GO}_c^2$$
$$=\frac{4R(r_a+r_b+r_c-r)}{3}+\frac{2}{3}\left(r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2\right)+\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{18}.$$

Des formules **51** et **56** on tire

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R,$$

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) ;$$

donc le deuxième membre de la relation précédente devient

$$\frac{16R^2}{3} + \frac{2}{3}\left(16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9},$$

ou

$$16R^2 - \frac{4}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

La formule est ainsi établie.

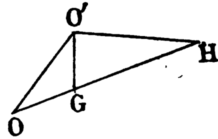
---

### Formule 89.

$$\overline{HO'}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$$

---

Nous avons vu que le point G est sur la droite OH et divise cette droite dans le rapport de 1 à 2. (85).




On peut donc calculer O'G en fonction des côtés du triangle OO'H, d'après la formule établie au début du numéro **86**.

Nous aurons

$$\overline{GO'}^2 = \frac{1}{3}\overline{O'H}^2 + \frac{2}{3}\overline{OO'}^2 - \frac{2}{9}\overline{OH}^2,$$

ou

$$\overline{O'H}^2 = 3\overline{GO'}^2 - 2\overline{OO'}^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2.$$

Or, on a

$$\overline{GO'}^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right), \qquad \textbf{(86)}$$

$$\overline{OO'}^2 = d^2 = R^2 - 2Rr, \qquad \textbf{(67)}$$

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad \textbf{(84)}$$

$$= 9R^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr).$$

En remplaçant, il vient

$$\overline{O'H}^2 = \frac{1}{3}(p^2+5r^2-16Rr)-2(R^2-2Rr)+\frac{2}{3}(9R^2-2p^2+2r^2+8Rr)$$
$$= 4R^2+4Rr+3r^2-p^2.$$

Remarque. — On peut aussi écrire

$$\overline{HO'}^2 = 4R^2 - 8Rr + bc + ca + ab - (a^2+b^2+c^2).$$

On le voit aisément en appliquant les formules 8 et 9.

---

**Formule 90.**

$$\overline{HO'}^2 + \overline{HO}_a^2 + \overline{HO}_b^2 + \overline{HO}_c^2 = 48R^2 - 4(a^2+b^2+c^2).$$

---

Dans la solution précédente, nous avons établi la relation

$$\overline{HO'}^2 = 3\overline{GO'}^2 - 2\overline{OO'}^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2.$$

On aurait de même

$$\overline{HO}_a^2 = 3\overline{GO}_a^2 - 2\overline{OO}_a^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2,$$
$$\overline{HO}_b^2 = 3\overline{GO}_b^2 - 2\overline{OO}_b^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2,$$
$$\overline{HO}_c^2 = 3\overline{GO}_c^2 - 2\overline{OO}_c^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2.$$

Ajoutons membre à membre, en remarquant que

$$\overline{GO'}^2 + \overline{GO}_a^2 + \overline{GO}_b^2 + \overline{GO}_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2), \quad (88)$$
$$\overline{OO'}^2 + \overline{OO}_a^2 + \overline{OO}_b^2 + \overline{OO}_c^2 = d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2. \quad (69)$$

On a

$$\overline{HO'}^2 + \overline{HO}_a^2 + \overline{HO}_b^2 + \overline{HO}_c^2$$
$$= 3\left[16R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)\right] - 24R^2 + \frac{8}{3}\overline{OH}^2$$
$$= 24R^2 - \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{8}{3}\overline{OH}^2,$$

ou, en tenant compte de **84**,

$$\overline{HO'}^2 + \overline{HO}_a^2 + \overline{HO}_b^2 + \overline{HO}_c^2$$

$$= 24R^2 - \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{8}{3}\left[9R^2 - (a^2+b^2+c^2)\right]$$

$$= 48R^2 - 4(a^2+b^2+c^2).$$

---

### Formule 91.

$$O_9O' = \frac{R}{2} - r.$$

---

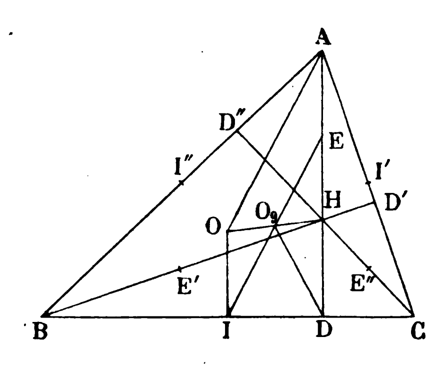
Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout triangle :*

1° *Les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments de ces mêmes hauteurs compris entre leur point d'intersection et les sommets du triangle sont neuf points situés sur une même circonférence.*

2° *Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.*

3° *Son centre est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs.*




Soient I, I′, I″ les milieux des côtés, D, D′, D″ les pieds des hauteurs et E, E′, E″ les milieux des segments AH, BH et CH. Il s'agit de démontrer que ces neuf points sont situés sur une même circonférence.

Nous avons vu (**18**) que $AH = 2OI$ ; par suite $EH = OI$, et si l'on tire EI qui rencontre OH au point $O_9$, les deux triangles

$EHO_9$ et $OIO_9$ sont égaux, $O_9$ est le milieu de OH et aussi le milieu de EI. Par suite, $EO_9$ joignant les milieux des côtés du triangle AHO est parallèle à AO et égal à $\frac{AO}{2}$.

Donc $$O_9E = O_9I = \frac{R}{2}.$$

De plus, $DO_9$ étant médiane du triangle rectangle DIE est égale à la moitié de l'hypoténuse ; donc

$$O_9D = O_9I = O_9E = \frac{R}{2}.$$

Il en résulte que le point $O_9$ est à la même distance, $\frac{R}{2}$, des neuf points considérés, car la démonstration s'étend aussi bien aux points D', I', E', etc.

Par conséquent, le point $O_9$ est le centre d'un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ passant par les neuf points indiqués, et appelé pour cette raison *cercle des neuf points*. Le théorème est donc démontré.

Cela posé, pour calculer $O_9O'$, nous remarquerons que $O_9O'$ est médiane du triangle OO'H ; la formule **28** nous donnera donc

$$\overline{O_9O'}^2 = \frac{\overline{OO'}^2 + \overline{HO'}^2}{2} - \frac{\overline{HO}^2}{4}.$$

Mais les formules **67**, **89** et **84** donnent

$$\begin{aligned} \overline{OO'}^2 &= R^2 - 2Rr, \\ \overline{HO'}^2 &= 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2, \\ \overline{HO}^2 &= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 9R^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr). \end{aligned} \qquad (9)$$

En remplaçant, on a

$$\overline{O_9O'}^2 = \frac{R^2 - 2Rr + 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2}{2} - \frac{9R^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr)}{4}$$
$$= \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

En extrayant la racine, et en remarquant que $\frac{R}{2} > r$, d'après

la formule 67, on a

$$O_9O' = \frac{R}{2} - r.$$

---

**Formule 92.**

$$O_9O_a = \frac{R}{2} + r_a.$$

---

On aura comme dans la solution précédente

$$\overline{O_9O_a}^2 = \frac{\overline{OO_a}^2 + \overline{HO_a}^2}{2} - \frac{\overline{HO}^2}{4}.$$

Or dans le numéro 90, nous avons montré que

$$\overline{HO_a}^2 = 3\overline{GO_a}^2 - 2\overline{OO_a}^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2;$$

donc

$$\overline{O_9O_a}^2 = \frac{3\overline{GO_a}^2 - \overline{OO_a}^2}{2} + \frac{1}{12}\overline{OH}^2.$$

En remplaçant $\overline{GO_a}^2$ par sa valeur (87), $\overline{OO_a}^2$ par sa valeur (68) et $\overline{OH}^2$ par sa valeur (84), on obtient

$$\overline{O_9O_a}^2 = \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2,$$

$$O_9O_a = \frac{R}{2} + r_a.$$

Remarque. — Les formules 91 et 92 prouvent que le cercle des neuf points est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits. Cette propriété est due à Feuerbach ; elle se démontre géométriquement par une méthode très élégante basée sur la théorie de l'inversion.

---

### Formule 93.

$$S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_a h_b h_c}.$$

On a

$$S = \frac{1}{2} ah_a,$$

$$S = \frac{1}{2} bh_b,$$

$$S = \frac{1}{2} ch_c.$$

En multipliant membre à membre et extrayant la racine cubique, on a la formule à établir.

---

### Formule 94.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{h_b^2 h_c^2} + \frac{1}{h_c^2 h_a^2} + \frac{1}{h_a^2 h_b^2}\right) - \left(\frac{1}{h_a^4} + \frac{1}{h_b^4} + \frac{1}{h_c^4}\right)}}.$$

Nous avons établi au numéro 2 la relation

$$h_a^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2},$$

ou

$$4a^2h_a^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

ou

$$16S^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Remplaçons dans le second membre $a$, $b$, $c$ respectivement par $\frac{2S}{h_a}$, $\frac{2S}{h_b}$, $\frac{2S}{h_c}$; il vient

$$16S^2 = 2\left(\frac{16S^4}{h_b^2 h_c^2} + \frac{16S^4}{h_c^2 h_a^2} + \frac{16S^4}{h_a^2 h_b^2}\right) - \left(\frac{16S^4}{h_a^4} + \frac{16S^4}{h_b^4} + \frac{16S^4}{h_c^4}\right),$$

d'où l'on tire, en divisant par $16S^4$,

$$\frac{1}{S^2} = 2\left(\frac{1}{h_b^2 h_c^2} + \frac{1}{h_c^2 h_a^2} + \frac{1}{h_a^2 h_b^2}\right) - \left(\frac{1}{h_a^4} + \frac{1}{h_b^4} + \frac{1}{h_c^4}\right).$$

Il suffit alors d'extraire la racine carrée des deux membres.

---

**Formule 95.**

$$S = \frac{1}{4}\left(ah'_a + bh'_b + ch'_c\right).$$

---

On peut écrire, en tenant compte de **18**,

$$\frac{1}{4}\left(ah'_a + bh'_b + ch'_c\right) = \frac{1}{2}\left(ak_a + bk_b + ck_c\right);$$

et nous avons vu dans le numéro **20** que

$$\frac{1}{2}\left(ak_a + bk_b + ck_c\right) = S.$$

On en déduit donc

$$S = \frac{1}{4}\left(ah'_a + bh'_b + ch'_c\right).$$

Cette formule n'est vérifiée que si le triangle a ses angles aigus. Si l'un des angles est obtus, A, par exemple, il faut remplacer dans la formule $h'_a$ par $-h'_a$, ou encore considérer $h'_a$, $h'_b$, $h'_c$ comme les nombres algébriques définis au numéro **13**.

---

**Formule 96.**

$$S = 2R^2 \frac{h_a h_b h_c}{abc}.$$

---

On a

$$h_a h_b h_c = \frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = \frac{8S^3}{abc};$$

donc

$$2R^2 \frac{h_a h_b h_c}{abc} = 2R^2 \cdot \frac{8S^3}{a^2b^2c^2} = \frac{16R^2S^3}{a^2b^2c^2};$$

et comme $4RS = abc$, (7)

on voit que le second membre est égal à S.

---

**Formule 97.**

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} Rh_a h_b h_c}.$$

On a

$$h_a h_b h_c = \frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = \frac{8S^3}{abc} = \frac{2S^2}{R}, \quad (7)$$

d'où

$$S^2 = \frac{1}{2} Rh_a h_b h_c,$$

et

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} Rh_a h_b h_c}.$$

---

**Formule 98.**

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}. \quad (2M = m_a + m_b + m_c)$$

Menons les trois médianes, qui se coupent au point G. Les deux triangles BGC et ABC ont une base commune BC, et les hauteurs correspondantes sont dans le rapport de GI à AI, c'est-à-dire de 1 à 3 (30). Donc l'aire du triangle BGC est égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

Menons CE parallèle à BG; les deux triangles BIG et EIC sont égaux, et par suite

$$\text{tr. GCE} = \frac{\text{tr. ABC}}{3}.$$

Mais le triangle GCE a pour côtés les deux tiers des médianes du triangle ABC, puisque

$$CG = \frac{2}{3} CI'',$$

$$GE = 2GI = \frac{2}{3} AI,$$

$$CE = BG = \frac{2}{3} BI'.$$

Si on appelle T l'aire du triangle qui a pour côtés les trois médianes, ce triangle est semblable au triangle GCE, et le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport des côtés homologues. Donc

$$GCE = \frac{4}{9} T;$$

par suite

$$\frac{4}{9} T = \frac{ABC}{3},$$

$$ABC = \frac{4}{3} T;$$

et comme

$$T = \sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}, \tag{3}$$

la formule est établie.

---

### Formule 99.

$$S = \frac{l_a l_b l_c (b + c)(c + a)(a + b)}{8abcp}.$$

---

La formule 31 donne

$$l_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{p(p - a)bc},$$

$$l_b = \frac{2}{c + a} \sqrt{p(p - b)ca},$$

$$l_c = \frac{2}{a + b} \sqrt{p(p - c)ab}.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$l_a l_b l_c = \frac{8}{(b+c)(c+a)(a+b)} \sqrt{p^2(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2},$$

ou

$$l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b) = 8pabcS,$$

d'où l'on déduit la formule demandée.

---

### Formule 100.

$$S = \sqrt{\frac{l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}}. \qquad (a > b > c)$$

---

La formule **32** donne

$$l_{1a} = \frac{2}{b-c} \sqrt{(p-b)(p-c)bc},$$

$$l_{1b} = \frac{2}{a-c} \sqrt{(p-c)(p-a)ca},$$

$$l_{1c} = \frac{2}{a-b} \sqrt{(p-a)(p-b)ab}.$$

Multiplions membre à membre ; il vient

$$l_{1a} l_{1b} l_{1c} = \frac{8}{(b-c)(a-c)(a-b)} \sqrt{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2a^2b^2c^2},$$

ou

$$l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-c)(a-c)(a-b) = 8abc(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= 8abc \frac{S^2}{p}.$$

On en tire

$$S^2 = \frac{l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}.$$

---

**Formule 101.**

$$S = \frac{l_a l_{1a}(b^2 - c^2)}{4bc}.$$

Les formules 31 et 32 donnent

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc},$$

$$l_{1a} = \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc}.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$l_a l_{1a} = \frac{4bc}{b^2-c^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4bcS}{b^2-c^2};$$

d'où l'on tire la formule demandée.

On peut aussi remarquer qu'au numéro 34 on a établi géométriquement la formule

$$l_a l_{1a} = \frac{2abch_a}{b^2-c^2} = \frac{4bcS}{b^2-c^2}.$$

**Formule 102.**

$$S = \sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

On a, d'après les formules 4 et 38,

$$r = \frac{S}{p}, \qquad r_a = \frac{S}{p-a}, \qquad r_b = \frac{S}{p-b}, \qquad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Multiplions membre à membre ; il vient

$$rr_a r_b r_c = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2,$$

d'où

$$S = \sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

### Formule 103.

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}.$$

Des relations du numéro précédent on déduit

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^3}{\frac{S^2}{p}} = pS,$$

d où

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}.$$

---

### Formule 104.

$$S = a\,\frac{rr_a}{r_a - r}.$$

On a

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{p}{S} - \frac{p-a}{S} = \frac{a}{S},$$

ou

$$\frac{r_a - r}{rr_a} = \frac{a}{S},$$

d'où l'on tire la formule demandée.

---

### Formule 105.

$$S = a\,\frac{r_b r_c}{r_b + r_c}.$$

On a

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{2p-b-c}{S} = \frac{a}{S},$$

ou

$$\frac{r_b + r_c}{r_b r_c} = \frac{a}{S}.$$

On en tire la formule à démontrer.

---

### Formule 106.

$$S = \frac{(a+b)rr_c}{r + r_c}.$$

---

On a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{2p-c}{S} = \frac{a+b}{S},$$

ou

$$\frac{r + r_c}{rr_c} = \frac{a+b}{S},$$

d'où

$$S = \frac{(a+b)rr_c}{r + r_c}.$$

---

### Formule 107.

$$S = \frac{(a-b)r_a r_b}{r_a - r_b}.$$

---

On a

$$\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} = \frac{p-b}{S} - \frac{p-a}{S} = \frac{a-b}{S},$$

ou

$$\frac{r_a - r_b}{r_a r_b} = \frac{a-b}{S},$$

d'où

$$S = \frac{(a-b)r_a r_b}{r_a - r_b}.$$

**Formule 108.**

$$S = \frac{rr_a(r_b + r_c)}{a}.$$

On a

$$rr_a(r_b + r_c) = \frac{S^2}{p(p-a)}\left[\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}\right] = \frac{S^3(2p-b-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{S^3 a}{S^2} = aS,$$

d'où

$$S = \frac{rr_a(r_b + r_c)}{a}.$$

---

**Formule 109.**

$$S = rr_a\sqrt{\frac{4R-(r_a-r)}{r_a-r}}.$$

De la formule 51 on tire

$$4R - (r_a - r) = r_b + r_c;$$

la quantité sous le radical peut alors s'écrire

$$\frac{r_b + r_c}{r_a - r} = \frac{\dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}}{\dfrac{S}{p-a} - \dfrac{S}{p}} = \frac{\dfrac{aS}{(p-b)(p-c)}}{\dfrac{aS}{p(p-a)}} = \frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Alors

$$rr_a\sqrt{\frac{4R-(r_a-r)}{r_a-r}} = rr_a\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{S^2}{p(p-a)}\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{S^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = S.$$

**Formule 110.**

$$S = r_a r_b \sqrt{\frac{\overline{O_aO_b}^2}{(r_a + r_b)^2} - 1}.$$

La formule 81 donne

$$\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2 ;$$

donc

$$\frac{\overline{O_aO_b}^2}{(r_a + r_b)^2} - 1 = \frac{(r_a + r_b)^2 + c^2}{(r_a + r_b)^2} - 1 = \frac{c^2}{(r_a + r_b)^2} ;$$

et par conséquent la formule à démontrer devient

$$S = \frac{c r_a r_b}{r_a + r_b},$$

qu'on démontre comme la formule 105.

# ÉLÉMENTS ANGULAIRES

---

La formule **111** est établie dans tous les traités de géométrie.

---

**Formule 112.**

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

---

On a

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

et comme les angles $\frac{A+B}{2}$ et $\frac{C}{2}$ sont complémentaires,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2},$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

On peut donc écrire

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

---

### Formule 113.

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Des premières égalités du numéro précédent on déduit

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right)$$
$$= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

### Formule 114.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$$

On a

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$
$$\cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{A+B}{2}.$$

Ajoutons membre à membre ; il vient

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right) + 1$$
$$= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$$

### Formule 115.

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1.$$

Des égalités du numéro précédent, on tire

$$\cos A + \cos B - \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right) - 1$$
$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1.$$

**Formule 116.**

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

---

Si A, B, C sont les angles d'un triangle, il existe un autre triangle qui a pour angles $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, puisque

$$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}=\frac{3\pi}{2}-\frac{(A+B+C)}{2}=\pi.$$

Par conséquent, à toute relation ayant lieu entre les angles d'un triangle correspondra une autre relation qu'on déduira de la première en remplaçant A, B, C par $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$. C'est ainsi qu'on déduit la formule **116** de la formule **112**. On déduira de même les formules **117, 118, 119** respectivement des formules **113, 114, 115**.

---

**Formule 120.**

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

---

On a

$$\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)$$
$$\sin 2C=2\sin C\cos C;$$

et comme les angles $A+B$ et C sont supplémentaires, on a

$$\sin C=\sin(A+B),$$
$$\cos C=-\cos(A+B).$$

Donc, en ajoutant les deux premières égalités, on a

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

---

### Formule 121.

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C.$$

En opérant comme dans le numéro précédent, on a

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B - \sin 2C &= 2 \sin C[\cos(A-B) + \cos(A+B)], \\ &= 4 \cos A \cos B \sin C. \end{aligned}$$

### Formule 122.

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1.$$

On a

$$\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos(A+B)\cos(A-B),$$
$$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \cos^2(A+B) - 1.$$

Ajoutons ; il vient

$$\begin{aligned} \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 2\cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 1 \\ &= -4 \cos A \cos B \cos C - 1. \end{aligned}$$

### Formule 123.

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -4 \sin A \sin B \cos C + 1.$$

En retranchant les deux premières égalités du numéro précédent, on a

$$\begin{aligned} \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C &= 2\cos(A+B)[\cos(A-B) - \cos(A+B)] + 1 \\ &= -4 \sin A \sin B \cos C + 1. \end{aligned}$$

### Formule 124.

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

On a

$$\sin 4A + \sin 4B = 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B),$$
$$\sin 4C = 2 \sin 2C \cos 2C.$$

Comme $2C = 2\pi - 2(A+B),$

on a $\sin 2C = -\sin 2(A+B),$

$\cos 2C = \cos 2(A+B).$

Par conséquent

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 2 \sin 2C[\cos 2(A+B) - \cos 2(A-B)],$$
$$= -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

---

### Formule 125.

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1.$$

---

On a

$$\cos 4A + \cos 4B = 2 \cos 2(A+B) \cos 2(A-B),$$
$$\cos 4C = 2 \cos^2 2C - 1.$$

Comme $2C = 2\pi - 2(A+B),$

on a $\cos 2C = \cos 2(A+B).$

Par conséquent

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 2 \cos 2C[\cos 2(A-B) + \cos 2(A+B)] - 1$$
$$= 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1.$$

---

### Formule 126.

$$\sin kA + \sin kB + \sin kC = \begin{cases} -4 \sin \frac{kA}{2} \sin \frac{kB}{2} \sin \frac{kC}{2}. & k = 4m \\ 4 \cos \frac{kA}{2} \cos \frac{kB}{2} \cos \frac{kC}{2}. & k = 4m+1 \\ 4 \sin \frac{kA}{2} \sin \frac{kB}{2} \sin \frac{kC}{2}. & k = 4m+2 \\ -4 \cos \frac{kA}{2} \cos \frac{kB}{2} \cos \frac{kC}{2}. & k = 4m+3 \end{cases}$$

$m$, entier.

---

On a, en effet,

$$\sin kA + \sin kB = 2 \sin \frac{k(A+B)}{2} \cos \frac{k(A-B)}{2},$$

$$\sin kC = 2 \sin \frac{kC}{2} \cos \frac{kC}{2}.$$

1° Si $k = 4m$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = \sin\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{kC}{2}\right) = -\sin\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{kC}{2}\right) = \cos\frac{kC}{2}.$$

Donc, en ajoutant les deux premières formules,

$$\sin kA + \sin kB + \sin kC = 2\sin\frac{kC}{2}\left[-\cos\frac{k(A-B)}{2} + \cos\frac{k(A+B)}{2}\right]$$

$$= -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}.$$

2° Si $k = 4m + 1$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = \cos\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = \sin\frac{kC}{2};$$

donc, opérant comme plus haut, il vient

$$\sin kA + \sin kB + \sin kC = 2\cos\frac{kC}{2}\left[\cos\frac{k(A-B)}{2} + \cos\frac{k(A+B)}{2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}.$$

3° Si $k = 4m + 2$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = \sin\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = -\cos\frac{kC}{2},$$

d'où

$$\sin kA + \sin kB + \sin kC = 2\sin\frac{kC}{2}\left[\cos\frac{k(A-B)}{2} - \cos\frac{k(A+B)}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2}.$$

4° Si $k = 4m + 3$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = -\cos\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = -\sin\frac{kC}{2};$$

donc

$$\sin kA + \sin kB + \sin kC = 2\cos\frac{kC}{2}\left[-\cos\frac{k(A-B)}{2} - \cos\frac{k(A+B)}{2}\right]$$

$$= -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2}.$$

La formule **127** s'établit de la même manière : il suffit de retrancher les deux premières relations du numéro précédent, en tenant compte des valeurs de $\sin\frac{k(A+B)}{2}$ et $\cos\frac{k(A+B)}{2}$, suivant les différentes valeurs de $k$.

---

**Formule 128.**

$$\cos kA + \cos kB + \cos kC = \begin{cases} 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1. & k = 4m \\ 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1. & k = 4m+1 \\ -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1. & k = 4m+2 \\ -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1. & k = 4m+3 \end{cases}$$

$m$, entier.

---

On a

$$\cos kA + \cos kB = 2\cos\frac{k(A+B)}{2}\cos\frac{k(A-B)}{2}, \qquad (\alpha)$$

$$\cos kC = 2\cos^2\frac{kC}{2} - 1, \qquad (\beta)$$

$$\cos kC = 1 - 2\sin^2\frac{kC}{2}. \qquad (\beta)'$$

1° Si $k = 4m$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = -\sin\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = \cos\frac{kC}{2}.$$

Ajoutons ($\alpha$) et ($\beta$) ; il vient

$$\cos kA + \cos kB + \cos kC = 2\cos\frac{kC}{2}\left[\cos\frac{k(A-B)}{2} + \cos\frac{k(A+B)}{2}\right] - 1$$

$$= 4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1.$$

2° Si $k = 4m + 1$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = \cos\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = \sin\frac{kC}{2}.$$

Ajoutons ($\alpha$) et ($\beta$)′ ; on a

$$\cos kA + \cos kB + \cos kC = 2\sin\frac{kC}{2}\left[\cos\frac{k(A-B)}{2} - \cos\frac{k(A-B)}{2}\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1.$$

3° Si $k = 4m + 2$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = \sin\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = -\cos\frac{kC}{2}.$$

Ajoutons ($\alpha$) et ($\beta$) ; il vient

$$\cos kA + \cos kB + \cos kC = 2\cos\frac{kC}{2}\left[-\cos\frac{k(A-B)}{2} - \cos\frac{k(A+B)}{2}\right] - 1$$

$$= -4\cos\frac{kA}{2}\cos\frac{kB}{2}\cos\frac{kC}{2} - 1.$$

4° Si $k = 4m + 3$, on a

$$\sin\frac{k(A+B)}{2} = -\cos\frac{kC}{2},$$

$$\cos\frac{k(A+B)}{2} = -\sin\frac{kC}{2}.$$

Ajoutons ($\alpha$) et ($\beta$)′ ; on a

$$\cos kA + \cos kB + \cos kC = 2\sin\frac{kC}{2}\left[-\cos\frac{k(A-B)}{2} + \cos\frac{k(A+B)}{2}\right] + 1$$

$$= -4\sin\frac{kA}{2}\sin\frac{kB}{2}\sin\frac{kC}{2} + 1.$$

La formule **129** s'établit absolument de la même manière : il suffit de retrancher les formules ($\alpha$) et ($\beta$) ou ($\alpha$) et ($\beta$)', qu'on ajoute dans la démonstration de la formule **128**.

On remarquera que les formules **112** à **125** sont des cas particuliers des formules **126**, **127**, **128** et **129**.

---

### Formule 130.

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

On a

$$\cos C = -\cos(A+B) = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B).$$

Élevons au carré ; il vient

$$\begin{aligned}\cos^2 C &= \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - 2 \cos A \cos B \sin A \sin B \\ &= \cos^2 A \cos^2 B + (1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B) - 2\cos A \cos B \sin A \sin B \\ &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + 2\cos^2 A \cos^2 B - 2\cos A \cos B \sin A \sin B,\end{aligned}$$

ou

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B(\cos A \cos B - \sin A \sin B).$$

Or,

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) = -\cos C ;$$

donc, il vient

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

---

### Formule 131.

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

On a

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),$$

ou, en tenant compte de la formule précédente,

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 3 - [1 - 2 \cos A \cos B \cos C] \\ &= 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

**Formule 132.**

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C.$$

On a

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A\ ;$$

en élevant au carré, on a

$$\begin{aligned}\sin^2 C &= \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 B \cos^2 A + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B \\ &= \sin^2 A(1 - \sin^2 B) + \sin^2 B(1 - \sin^2 A) + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B \\ &= \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin^2 A \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B,\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C &= 2 \sin A \sin B (\sin A \sin B - \cos A \cos B) \\ &= -2 \sin A \sin B \cos (A + B) \\ &= 2 \sin A \sin B \cos C.\end{aligned}$$

---

**Formule 133.**

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = -2 \sin A \sin B \cos C + 1.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C &= (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 C) \\ &= 1 - (\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C),\end{aligned}$$

et en remplaçant $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$ par sa valeur tirée de **132**, on a la formule à établir.

---

**Formule 134.**

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 2(-1)^k \cos kA \cos kB \cos kC + 1.$$

$k$, entier.

On a

$$\cos kC = \cos [k\pi - k(A + B)] = \pm \cos k(A + B)\ ;$$

en élevant au carré, il vient

$$\cos^2 kC = \cos^2 kA \cos^2 kB + \sin^2 kA \sin^2 kB - 2\cos kA \cos kB \sin kA \sin kB$$
$$= \cos^2 kA \cos^2 kB + (1 - \cos^2 kA)(1 - \cos^2 kB)$$
$$- 2 \cos kA \cos kB \sin kA \sin kB$$
$$= 1 - \cos^2 kA - \cos^2 kB + 2 \cos^2 kA \cos^2 kB$$
$$- 2 \cos kA \cos kB \sin kA \sin kB;$$

on en tire

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC$$
$$= 2 \cos kA \cos kB (\cos kA \cos kB - \sin kA \sin kB) + 1$$
$$= 2 \cos kA \cos kB \cos k(A + B) + 1.$$
$$= 2 \cos kA \cos kB \cos (k\pi - kC) + 1.$$

Or, si $k$ est pair,

$$\cos(k\pi - kC) = \cos kC;$$

si $k$ est impair,

$$\cos(k\pi - kC) = -\cos kC;$$

on peut donc écrire

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 2(-1)^k \cos kA \cos kB \cos kC + 1.$$

---

### Formule 135.

$$\sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC = -2(-1)^k \cos kA \cos kB \cos kC + 2.$$

$k$, entier

On a

$$\sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC = 3 - (\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC);$$

et, en tenant compte de **134**, on a la formule à établir.

---

### Formule 136.

$$\sin^2 kA + \sin^2 kB - \sin^2 kC = -2(-1)^k \sin kA \sin kB \cos kC.$$

$k$, entier

On a

$$\sin kC = \sin[k\pi - k(A + B)] = \pm \sin k(A + B).$$

Élevons au carré :

$$\sin^2 kC = \sin^2 kA \cos^2 kB + \sin^2 kB \cos^2 kA + 2 \sin kA \sin kB \cos kA \cos kB$$
$$= \sin^2 kA(1 - \sin^2 kB) + \sin^2 kB(1 - \sin^2 kA)$$
$$+ 2 \sin kA \sin kB \cos kA \cos kB$$
$$= \sin^2 kA + \sin^2 kB + 2 \sin kA \sin kB$$
$$(\cos kA \cos kB - \sin kA \sin kB) ;$$

ce qu'on peut écrire

$$\sin^2 kA + \sin^2 kB - \sin^2 kC = -2 \sin kA \sin kB \cos k(A + B)$$
$$= -2 \sin kA \sin kB \cos (k\pi - kC)$$
$$= -2(-1)^k \sin kA \sin kB \cos kC.$$

---

**Formule 137.**

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB - \cos^2 kC = 2(-1)^k \sin kA \sin kB \cos kC + 1.$$

$k$, entier

Cette formule se déduit immédiatement de la précédente, en observant que

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB - \cos^2 kC = 1 - (\sin^2 kA + \sin^2 kB - \cos^2 kC).$$

---

**Formule 138.**

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$$

Il suffit de remplacer dans la formule **130**, A, B C respectivement par $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, comme on l'a déjà fait au numéro **116**.

On déduit de même les formules **139**, **140** et **141** des formules **131**, **132** et **133**.

---

### Formule 142.

$$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$$

---

On a

$$\sin 3A = \sin A \cos 2A + \sin 2A \cos A$$
$$= \sin A(1-2\sin^2 A)+2\sin A\cos^2 A$$
$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$$

On en tire

$$\sin^3 A = \frac{3}{4}\sin A - \frac{1}{4}\sin 3A.$$

Écrivons des formules analogues pour B et C, puis ajoutons; on a

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C$$
$$= \frac{3}{4}\left(\sin A + \sin B + \sin C\right) - \frac{1}{4}\left(\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C\right).$$

Remplaçons les quantités entre parenthèses du second membre par leurs valeurs tirées de 126, où l'on donne à $k$ les valeurs 1 et 3; il vient

$$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$$

---

### Formule 143.

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$$
$$= 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}+1.$$

---

On a

$$\cos 3A = \cos A\cos 2A - \sin A \sin 2A$$
$$= \cos A(2\cos^2 A - 1) - 2\sin^2 A\cos A$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A.$$

On en déduit

$$\cos^3 A = \frac{3}{4}\cos A + \frac{1}{4}\,3\cos A.$$

Écrivons des formules analogues pour B et C, puis ajoutons ; il vient

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$$
$$= \frac{3}{4}\left(\cos A + \cos B + \cos C\right) + \frac{1}{4}\left(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C\right).$$

Remplaçons les quantités entre parenthèses du second membre par leurs valeurs tirées de **128**, où l'on donne à $k$ les valeurs 1 et 3 ; on obtient

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$$
$$= \frac{3}{4}\left[4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} + 1\right] + \frac{1}{4}\left[-4 \sin\frac{3A}{2} \sin\frac{3B}{2} \sin\frac{3C}{2} + 1\right]$$
$$= 3 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} - \sin\frac{3A}{2} \sin\frac{3B}{2} \sin\frac{3C}{2} + 1.$$

---

### Formule 144.

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C + 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{3}{2}.$$

---

On a

$$\cos 4A = 1 - 2 \sin^2 2A = 1 - 8 \sin^2 A \cos^2 A$$
$$= 1 - 8 \sin^2 A + 8 \sin^4 A.$$

On en tire

$$\sin^4 A = \frac{1}{8} \cos 4A + \sin^2 A - \frac{1}{8}.$$

Écrivons les formules analogues pour B et C, puis ajoutons :

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C\right) + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - \frac{3}{8},$$

ou, en tenant compte de **125** et **131**,

$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C - \frac{1}{8} + 2 \cos A \cos B \cos C + 2 - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C + 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{3}{2}.$$

### Formule 145.

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2}.$$

---

On a

$$\cos 4A = 1 - 2 \sin^2 2A = 1 - 8 \sin^2 A \cos^2 A$$
$$= 1 - 8 \cos^2 A + 8 \cos^4 A.$$

On en tire

$$\cos^4 A = \frac{1}{8} \cos 4A + \cos^2 A - \frac{1}{8}.$$

Écrivons les formules analogues pour B et C, puis ajoutons :

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C\right) + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - \frac{3}{8},$$

ou, en tenant compte de **125** et **130**,

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C - \frac{1}{8} - 2 \cos A \cos B \cos C + 1 - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2}.$$

---

### Formule 146.

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

---

On a

$$\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(A + B) = -\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B},$$

ou

$$\operatorname{tg} C (1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 0,$$
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

On peut aussi observer que

$$\operatorname{tg}(A+B+C) = \operatorname{tg}[(A+B)+C]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg}(A+B)\cdot\operatorname{tg} C} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}+\operatorname{tg} C}{1-\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}\cdot \operatorname{tg} C}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C-\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B},$$

et comme le premier membre est nul, puisque

$$A+B+C = \pi,$$

on a

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

---

### Formule 147.

$$\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC = \operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC. \qquad (m, \text{ entier})$$

---

En opérant comme dans le numéro précédent, on voit que

$$\operatorname{tg} m(A+B+C) = \frac{\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC-\operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC}{1-\operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC-\operatorname{tg} mC \operatorname{tg} mA-\operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB}.$$

Or

$$m(A+B+C) = m\pi,$$

donc

$$\operatorname{tg} m(A+B+C) = 0;$$

par suite,

$$\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC = \operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC.$$

---

### Formule 148.

$$\operatorname{cotg} mB \operatorname{cotg} mC+\operatorname{cotg} mC \operatorname{cotg} mA+\operatorname{cotg} mA \operatorname{cotg} mB = 1.$$

$(m, \text{ entier})$

---

De la formule précédente on tire

$$\frac{\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC}{\operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{tg} mB \operatorname{tg} mC} + \frac{1}{\operatorname{tg} mC \operatorname{tg} mA} + \frac{1}{\operatorname{tg} mA \operatorname{tg} mB} = 1,$$

ou encore

$$\operatorname{cotg} mB \operatorname{cotg} mC + \operatorname{cotg} mC \operatorname{cotg} mA + \operatorname{cotg} mA \operatorname{cotg} mB = 1.$$

---

**Formule 149.**

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

---

Il suffit de remplacer dans la formule **146** A, B, C par $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, ainsi qu'on l'a vu dans le numéro **116**.

La formule **150** s'établit de la même manière, en partant de la formule **148** où l'on fait $m = 1$.

---

**Formule 151.**

$$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C.$$

---

On a

$$\begin{aligned} &\sin(A+B+C) \\ &= \sin(A+B) \cos C + \cos(A+B) \sin C \\ &= (\sin A \cos B + \sin B \cos A) \cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \sin C, \end{aligned}$$

et comme

$$\sin(A+B+C) = 0,$$

il en résulte la formule à démontrer.

---

**Formule 152.**

$$\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B = \cos A \cos B \cos C + 1.$$

On a

$$\begin{aligned} &\cos(A+B+C) \\ &= \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C \\ &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\cos C - (\sin A \cos B + \sin B \cos A)\sin C. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\cos(A+B+C) = -1,$$

il vient la formule à démontrer.

---

**Formule 153.**

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C.$$

Il suffit de diviser les deux membres de la formule précédente par $\sin A \sin B \sin C$.

---

**Formule 154.**

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1 + \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C.$$

Le premier membre peut s'écrire, en remplaçant les tangentes en fonction des sinus et cosinus, puis réduisant au même dénominateur,

$$\frac{\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C},$$

ou, en tenant compte de **152**,

$$\frac{\cos A \cos B \cos C + 1}{\cos A \cos B \cos C} = 1 + \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C.$$

**Formule 155.**

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - (\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C) = 2 + 2 \sec A \sec B \sec C.$$

La formule **146** nous donne

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C;$$

élevons les deux membres au carré :

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C$$
$$= \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C + 2(\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B);$$

en tenant compte de la formule **154**, on a la formule demandée.

---

**Formule 156.**

$$\operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C - (\operatorname{tg}^3 A + \operatorname{tg}^3 B + \operatorname{tg}^3 C) = \frac{3 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos A \cos B \cos C}.$$

La formule **146** nous donne

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C;$$

élevons les deux membres au cube, il vient

$$\operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^3.$$

Or, on sait que

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y);$$

appliquons cette formule au second membre de l'égalité précédente, en remplaçant $x$ par $\operatorname{tg} A$ et $y$ par $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$; il vient

$$\operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C$$
$$= \operatorname{tg}^3 A + (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^3 + 3 \operatorname{tg} A(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C),$$

ou

$$\operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C - (\operatorname{tg}^3 A + \operatorname{tg}^3 B + \operatorname{tg}^3 C)$$
$$= 3 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) + 3 \operatorname{tg} A (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$
$$= 3(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)$$

$$= 3 \cdot \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} \cdot \frac{\sin(C+A)}{\cos C \cos A} \cdot \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

$$= 3 \cdot \frac{\sin A}{\cos B \cos C} \cdot \frac{\sin B}{\cos C \cos A} \cdot \frac{\sin C}{\cos A \cos B}$$

$$= 3 \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} = 3 \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos A \cos B \cos C}.$$

---

**Formule 157.**

$$\frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} + \frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 1.$$

On a

$$\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C},$$

$$\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C}.$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C.$$

Le premier membre de la formule à établir devient donc

$$\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B,$$

et cette somme est égale à 1, en vertu de **148**.

---

**Formule 158**

$$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right) = 2 + 2 \operatorname{tg}\frac{A}{4} \operatorname{tg}\frac{B}{4} \operatorname{tg}\frac{C}{4},$$

Toutes les formules établies depuis le numéro **112** reposent simplement sur la relation **111** ; on peut donc dans une quel-

conque de ces formules remplacer A, B, C respectivement par $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$, puisque

$$(\pi - 2A) + (\pi - 2B) + (\pi - 2C) = 3\pi - 2(A + B + C) = \pi ;$$

et cela, quand bien même l'une des quantités $\pi - 2A$, $\pi - 2B$ ou $\pi - 2C$ serait négative.

Au lieu d'établir la formule **158**, nous établirons la formule qu'on en déduit en faisant la substitution indiquée, c'est-à-dire

$$\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)\right]\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right)\right]\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 2 + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right).$$

On peut d'ailleurs remarquer que, réciproquement, la formule **158** se déduit de cette dernière formule à l'aide de la substitution indiquée au numéro **116** ; l'une quelconque des deux formules entraîne l'autre.

On a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}}.$$

Donc

$$1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

et la formule à établir devient, en chassant le dénominateur,

$$8 = 2\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$
$$+ 2\left(1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right),$$

ou

$$8 = 4 + 4\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right),$$

ou

$$1 = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2};$$

c'est la formule **150**.

**Formule 159.**

$$\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

On a

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C \qquad (146)$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}; \qquad (112)$$

donc

$$\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{16\cos A\cos B\cos C\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

**Formule 160.**

$$\frac{\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C-2(\operatorname{cotg} 2A+\operatorname{cotg} 2B+\operatorname{cotg} 2C)}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$=(\operatorname{séc} A-1)(\operatorname{séc} B-1)(\operatorname{séc} C-1).$$

Le deuxième membre s'écrit

$$\left(\frac{1}{\cos A}-1\right)\left(\frac{1}{\cos B}-1\right)\left(\frac{1}{\cos C}-1\right)=\frac{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\cos A\cos B\cos C}.$$

On en tire

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)$$
$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$$
$$=\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C. \qquad (146)$$

Or $\cot A-\operatorname{tg} A=\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\cos 2A}{\frac{1}{2}\sin 2A}=2\cot 2A;$

de même,

$$\cot B-\operatorname{tg} B=2\cot 2B,$$
$$\cot C-\operatorname{tg} C=2\cot 2C.$$

En ajoutant ces trois dernières relations, on a

$$\cot A+\cot B+\cot C-(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)$$
$$=2(\cot 2A+\cot 2B+\cot 2C),$$

ce qui démontre la formule demandée.

---

### Formule 161.

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}.$$

---

On a

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$$
$$=\cot\frac{A}{2}.$$

---

**Formule 162.**

$$\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = -\frac{\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C}{\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1}.$$

---

Des formules 124 et 125 on tire

$$\begin{aligned}\frac{\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C}{\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1} &= \frac{-4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C} \\ &= -\operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C \\ &= -(\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C). \quad (147)\end{aligned}$$

On pourrait obtenir bien d'autres formules analogues à l'aide des formules 126 et 128.

---

**Formule 163.**

$$\begin{aligned}&(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B)(\sin C + \cos C) \\ &\qquad = 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \cos A \cos B \cos C + 1.\end{aligned}$$

---

En effectuant le produit indiqué dans le premier membre, on obtient la somme des premiers membres des formules 151 et 152, augmentée de $\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C$. En tenant compte de ces formules, la formule 163 est établie.

---

**Formule 164.**

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

---

En réduisant au même dénominateur, le premier membre peut s'écrire

$$\frac{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C}{\sin A \sin B \sin C},$$

ou

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2 \sin A \sin B \sin C},$$

expression qui est égale à 2, d'après la formule **120**.

---

### Formule 165.

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}+\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}+\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}+\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}+\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}+\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}=\operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C-2$$

Le premier membre peut s'écrire

$$\operatorname{tg} A\left(\frac{1}{\operatorname{tg} B}+\frac{1}{\operatorname{tg} C}\right)+\operatorname{tg} B\left(\frac{1}{\operatorname{tg} C}+\frac{1}{\operatorname{tg} A}\right)+\operatorname{tg} C\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A}+\frac{1}{\operatorname{tg} B}\right),$$

ou

$$(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A}+\frac{1}{\operatorname{tg} B}+\frac{1}{\operatorname{tg} C}\right)-3,$$

ou, en tenant compte de **146**,

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A}+\frac{1}{\operatorname{tg} B}+\frac{1}{\operatorname{tg} C}\right)-3,$$

ou $$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C+\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A+\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B-3,$$

et cette quantité est égale, d'après **154**, à

$$\operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C-2.$$

---

### Formule 166.

$$\frac{1-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos^2 A}+\frac{1-\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A}{\cos^2 B}+\frac{1-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\cos^2 C}=-\frac{3}{\cos A \cos B \cos C}$$

On a

$$\frac{1-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos^2 A}=\frac{\cos B \cos C-\sin B \sin C}{\cos^2 A \cos B \cos C}$$

$$=\frac{\cos (B+C)}{\cos^2 A \cos B \cos C}=-\frac{1}{\cos A \cos B \cos C}.$$

Les trois fractions du premier membre ont ainsi la même valeur, et leur somme est égale à $-\dfrac{3}{\cos A \cos B \cos C}$.

---

### Formule 167.

$$\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)+\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)+\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{C-A}{4}\cos\frac{A-B}{4}-1.$$

---

Posons

$$B+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha, \qquad C+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\beta, \qquad A+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\gamma;$$

en ajoutant, on a

$$\frac{3}{2}(A+B+C)=\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\beta+\gamma),$$

c'est-à-dire
$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

En opérant comme dans le numéro 114, on voit sans peine que

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1$$
$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-1$$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-1.$$

Or,

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}-\frac{C}{4}=\frac{A+B+C-2B-C}{4}$$
$$=\frac{A-B}{4};$$

de même,

$$\frac{\beta}{2}=\frac{B-C}{4}, \qquad \frac{\gamma}{2}=\frac{C-A}{4},$$

ce qui établit la formule.

**Formule 168.**

$$\sin A \sin(A-B)\sin(A-C)+\sin B \sin(B-C)\sin(B-A)$$
$$+\sin C\sin(C-A)\sin(C-B)=\sin A\sin B\sin C-\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

---

On a

$$\sin(A-B)\sin(A-C)=\frac{1}{2}\Big[\cos(C-B)-\cos(2A-B-C)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\cos(C-B)+\cos 3A\Big].$$

Le premier terme du premier membre peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2}\Big[\sin A\cos(C-B)+\cos 3A\sin A\Big],$$

et, par conséquent, ce premier membre devient

$$\frac{1}{2}\Big[\sin A\cos(C-B)+\sin B\cos(A-C)+\sin C\cos(B-A)\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\cos 3A\sin A+\cos 3B\sin B+\cos 3C\sin C\Big].$$

La première parenthèse est égale à

$$\frac{1}{2}\Big[3\sin A\sin B\sin C+\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$$
$$+\sin C\cos A\cos B\Big],$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de **151**,

$$2\sin A\sin B\sin C.$$

La deuxième parenthèse, en remarquant que

$$\frac{1}{2}\cos 3A\sin A=\frac{1}{4}\Big(\sin 4A-\sin 2A\Big),$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{4}\Big(\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C\Big)-\frac{1}{4}\Big(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\Big),$$

ou, d'après **124** et **120**,

$$-\sin 2A\sin 2B\sin 2C-\sin A\sin B\sin C.$$

Le premier membre de la formule **168** est donc égal à

$$\sin A \sin B \sin C - \sin 2A \sin 2B \sin 2C,$$

et la formule est établie.

---

### Formule 169.

$$\sin^3 A \cos(B - C) + \sin^3 B \cos(C - A) + \sin^3 C \cos(A - B) = 3 \sin A \sin B \sin C.$$

On a

$$\begin{aligned} \sin^3 A \cos(B - C) &= \sin^2 A \sin(B + C)\cos(B - C) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 A[\sin 2B + \sin 2C] \\ &= \sin^2 A[\sin B \cos B + \sin C \cos C]. \end{aligned}$$

En remplaçant de même les deux autres termes du premier membre par une formule analogue, ce premier membre peut s'écrire

$$\sin^2 A(\sin B \cos B + \sin C \cos C) + \sin^2 B(\sin C \cos C + \sin A \cos A) + \sin^2 C(\sin A \cos A + \sin B \cos B),$$

ou

$$\sin B \sin C(\sin B \cos C + \sin C \cos B) + \sin C \sin A[\sin C \cos A + \sin A \cos C] + \sin A \sin B[\sin A \cos B + \sin B \cos A],$$

ou

$$\sin B \sin C \sin(B+C) + \sin C \sin A \sin(C+A) + \sin A \sin B \sin(A+B),$$

c'est-à-dire

$$3 \sin A \sin B \sin C.$$

---

En terminant les démonstrations de cette série de formules, nous remarquerons qu'on peut en déduire de nouvelles en remplaçant A, B, C par $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, ou par

$\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C$ ou plus généralement par

$$\frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - A\right), \quad \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - B\right), \quad \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - C\right),$$

puisque

$$\frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - A\right) + \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - B\right) + \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - C\right) = \pi,$$

$k$ étant un nombre quelconque.

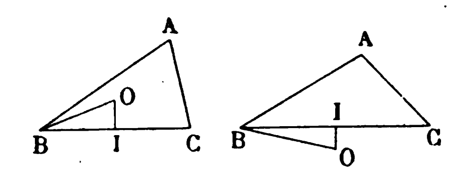
# ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES

---

**Formule 170.**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

---




Dans le triangle OIB on a

$$IB = OB \sin \widehat{IOB}.$$

L'angle $\widehat{IOB}$ est égal à A, si A est aigu, et au supplément de A, si A est obtus; donc, dans tous les cas, $\sin \widehat{IOB} = \sin A$, et la relation peut s'écrire

$$\frac{a}{2} = R \sin A,$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = 2R;$$

cette relation ayant lieu quel que soit le côté choisi, la formule demandée est établie.

Remarque. — On voit ainsi que les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés; il en résulte que si une relation est homogène par rapport aux côtés, on pourra remplacer les côtés par les sinus des angles opposés. En effet, en remplaçant $a$, $b$, $c$ par leurs valeurs égales, $2R \sin A$,

2R sin B, 2R sin C, 2R disparaîtra par suite de l'homogénéité, et le résultat sera le même que si on avait simplement remplacé $a$, $b$, $c$ par sin A, sin B, sin C.

On pourra de même, dans toute relation homogène par rapport à sin A, sin B, sin C, remplacer ces quantités par $a$, $b$, $c$.

---

### Formule 171.

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

On a
$$\sin A = \sin(B + C),$$
$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B;$$
cette relation étant homogène par rapport à sin A, sin B, sin C, je puis remplacer les sinus par les côtés, ce qui me donne
$$a = b \cos C + c \cos B.$$

---

### Formule 172.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

La formule **132** nous donne
$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C,$$
relation homogène par rapport à sin A, sin B, sin C; en remplaçant les sinus par les côtés, on a
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$$
ou
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$
dont la formule **172** se déduit par une simple permutation de lettres.

On trouvera dans tous les traités de trigonométrie des démonstrations directes des formules **171** et **172**.

---

**Formule 173.**

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

De la formule 172 on tire

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d'où

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.$$

On en déduit la formule demandée.

**Formule 174.**

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

La formule 172 donne

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d'où

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

On en déduit

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

---

**Formule 175.**

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

---

La formule 172 donne

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

d'où

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2p(p-a)}{bc}$$

On en déduit

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

---

**Formule 176.**

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Il suffit de diviser membre à membre les formules **174** et **175**. Cette formule peut aussi s'écrire

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},$$

en tenant compte de la formule **5**.

**Formule 177.**

$$a=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

De la relation **170** on déduit

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad (112)$$

ou

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

ou

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{p}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

**Formule 178.**

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

---

De **170** on déduit

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C},$$

ou

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}},$$

et comme

$$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2},$$

il vient

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

---

**Formule 179.**

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

---

De **170** on déduit

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C},$$

ou

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

et comme

$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2},$$

on en tire

$$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

---

**Formule 180.**

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

---

On a

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin^2(A+B)} = \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

En remplaçant dans le second membre $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ respectivement par $\frac{a}{2R}$, $\frac{b}{2R}$ et $\frac{c}{2R}$, il vient

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

---

**Formule 181.**

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

---

De la formule **172** on déduit

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2ac\cos B}{2bc\cos A} = \frac{a\cos B}{b\cos A},$$

et comme $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, on a

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

---

**Formule 182.**

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

---

Remplaçons $a$, $b$, $c$ par 2R sin A, 2R sin B, 2R sin C; le premier membre devient

$$2R[\sin A \sin (B - C) + \sin B \sin (C - A) + \sin C \sin (A - B)],$$

ou

$$2R[\sin (B + C) \sin (B - C) + \sin (C + A) \sin (C - A) + \sin (A + B) \sin (A - B)],$$

ou

$$2R[\sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B],$$

expression qui est nulle.

---

**Formule 183.**

$$\frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin (C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin (A - B)}{\sin C} = 0.$$

---

La même substitution que plus haut donne dans le premier membre

$$4R^2[\sin A \sin (B - C) + \sin B \sin (C - A) + \sin C \sin (A - B)],$$

expression qui est égale à zéro en vertu du calcul précédent.

---

**Formule 184.**

$$\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0.$$

La même substitution que dans les formules précédentes donne dans le premier membre

$$4R\left[\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\right],$$

ou

$$4R\left[\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\right],$$

ou

$$4R\left[\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right],$$

expression qui est nulle.

---

**Formule 185.**

$$\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=0.$$

En remplaçant $a$, $b$, $c$ par $2R\sin A$, $2R\sin B$, $2R\sin C$ respectivement, le premier membre devient

$$4R\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right].$$

Or, on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+C-B}{2}-\cos\frac{A+B-C}{2}\right];$$

de même,

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B+A-C}{2}-\cos\frac{B+C-A}{2}\right],$$

$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{C+B-A}{2}-\cos\frac{C+A-B}{2}\right].$$

En ajoutant, on voit que

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0,$$

et la formule 185 est établie.

---

**Formule 186.**

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$$

La même substitution que plus haut donne dans le premier membre

$$4R^2\left[\frac{\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin^2 B\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{\sin^2 C\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}\right]. \quad (\alpha)$$

Or,

$$\frac{\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\frac{\sin A\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{\sin A(\sin^2 B-\sin^2 C)}{\sin B+\sin C}$$

$$=\sin A(\sin B-\sin C).$$

On a de même

$$\frac{\sin^2 B\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}=\sin B(\sin C-\sin A),$$

$$\frac{\sin^2 C\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=\sin C[\sin A-\sin B].$$

Ajoutons membre à membre ces trois égalités; on voit que l'expression ($\alpha$) est nulle. La formule 186 est donc établie.

**Formule 187.**

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p^2}{abc}.$$

La formule 175 donne

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc},$$

et de même

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p(p-b)}{ca},$$

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{ab}.$$

En remplaçant, on a

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)}{abc}$$
$$=\frac{3p^2-p(a+b+c)}{abc}=\frac{p^2}{abc}.$$

**Formule 188.**

$$(b-c)\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}+(c-a)\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}+(a-b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=0.$$

On a

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{r},$$

d'après la formule 176.

Le premier membre de la formule 188 devient alors

$$\frac{1}{r}\Big[(b-c)(p-a)+(c-a)(p-b)+(a-b)(p-c)\Big],$$

ou, en mettant $p$ en facteur,

$$\frac{1}{r}\Big[(b-c+c-a+a-b)p-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)\Big],$$

expression visiblement nulle.

**Formule 189.**

$$(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}+(c+a)\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}+(a+b)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=0.$$

En divisant membre à membre les formules 178 et 179, on obtient

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

relation qui est d'ailleurs utilisée dans la résolution d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris.

On peut écrire cette relation

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{p-a}{r},$$

et, en remplaçant $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ par cette valeur dans le premier membre de 189, on obtient

$$\frac{1}{r}\Big[(b-c)(p-a)+(c-a)(p-b)+(a-b)(p-c)\Big],$$

expression qui est nulle comme on l'a vu précédemment.

**Formule 190.**

$$\frac{\cos B-\cos C}{p-a}+\frac{\cos C-\cos A}{p-b}+\frac{\cos A-\cos B}{p-c}=0.$$

On a

$$\cos B-\cos C=-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

D'autre part, la formule 176 donne

$$p-a=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} = -\frac{2}{r}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

et le premier membre de la formule **190** s'écrit

$$-\frac{2}{r}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right];$$

or, nous avons établi au numéro **185** que la quantité entre parenthèses était nulle.

---

### Formule 191.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}}.$$

De **170** on déduit

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sin A}, \qquad R = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sin B}, \qquad R = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sin C};$$

multipliant membre à membre et extrayant la racine cubique, on a la formule à établir.

---

### Formule 192.

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C.$$

En tenant compte de **170**, on peut écrire

$$\begin{aligned} a\cos A + b\cos B + c\cos C \\ &= 2R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \\ &= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C), \end{aligned}$$

et, d'après la formule **120**,

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C.$$

---

### Formule 193.

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = \frac{p^2}{2R^2}.$$

---

On a

$$1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2},$$

$$1+\cos B = 2\cos^2\frac{B}{2},$$

$$1+\cos C = 2\cos^2\frac{C}{2};$$

multiplions membre à membre ; il vient

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = 8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2},$$

ou, en tenant compte de **112**,

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = \frac{1}{2}\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$= \frac{p^2}{2R^2}.$$

---

### Formule 194.

$$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\cos A+b\cos B+c\cos C} = R.\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$$

---

On a

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}; \qquad (170)$$

d'autre part, d'après **192**,

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$= 4R\cdot\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2}.$$

Divisons membre à membre ; il vient

$$\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = R \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

---

**Formule 195.**

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

---

La formule 176 nous donne

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c};$$

multiplions membre à membre, on a

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r^3}{pr^2} \qquad (5)$$

$$= \frac{r}{p}.$$

---

**Formule 196.**

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}.$$

---

La formule 174 nous donne

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};$$

multiplions membre à membre, il vient

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=\frac{pr^2}{4RS}=\frac{r}{4R}. \qquad (5 \text{ et } 7)$$

---

**Formule 197.**

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}.$$

---

De la formule 176 on tire

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}, \qquad \cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}, \qquad \cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r};$$

ajoutons membre à membre, on a

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p-a+p-b+p-c}{r}=\frac{3p-2p}{r}=\frac{p}{r}.$$

---

**Formule 198.**

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}.$$

---

D'après 176 on peut écrire

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}$$

$$=\frac{r}{(p-a)(p-b)(p-c)}\Big[(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)\Big]$$

$$=\frac{r}{(p-a)(p-b)(p-c)}\Big[3p^2-2p(a+b+c)+bc+ca+ab\Big]$$

$$=\frac{r}{(p-a)(p-b)(p-c)}\Big[-p^2+bc+ca+ab\Big].$$

Remplaçons $bc+ca+ab$ par sa valeur tirée de **8** ; on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{pr^2}\left(r^2+4Rr\right)=\frac{4R+r}{p}.$$

On trouvera au numéro **217** une autre démonstration s'appuyant sur les valeurs des rayons des cercles exinscrits.

---

**Formule 199.**

$$\frac{R}{r}=\frac{a+b+c}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}.$$

On a

$$\frac{a+b+c}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\frac{2p}{4R\sin A\sin B\sin C} \quad (192)$$

$$=\frac{p}{2R\cdot\frac{abc}{8R^3}} \quad (170)$$

$$=\frac{4R^2p}{4RS}=\frac{R}{r}.$$

---

**Formule 200.**

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}.$$

On a

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}. \quad (170)$$

---

**Formule 201.**

$$\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}.$$

On a

$$\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B=\frac{bc+ca+ab}{4R^2} \quad (170)$$

$$=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2},$$

d'après la formule 8.

### Formule 202.

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}.$$

On a

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{8R^3} = \frac{4RS}{8R^3} = \frac{pr}{2R^2}.$$

### Formule 203.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

On a, d'après la formule **114**,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de **196**,

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

### Formule 204.

$$\cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}.$$

Le premier membre peut s'écrire

$$\cos (B + C) + \cos (C + A) + \cos (A + B) + \sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B,$$

ou

$$-(\cos A + \cos B + \cos C) + \sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B,$$

ou, en tenant compte de **203** et de **201**,

$$-1 - \frac{r}{R} + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}.$$

**Formule 205.**

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}.$$

De la formule 130 on tire

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C}{2}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2}{2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}{8R^2}, \qquad (170)$$

et, en tenant compte de 9,

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{2p^2 - 2r^2 - 8Rr - 8R^2}{8R^2}$$

$$= \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}.$$

---

**Formule 206.**

$$a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(R + r).$$

On a

$$a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C$$

$$= 2R(\sin A \operatorname{cotg} A + \sin B \operatorname{cotg} B + \sin C \operatorname{cotg} C) \qquad (170)$$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

D'après la formule 203, le second membre peut s'écrire

$$2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2(R + r).$$

**Formule 207.**

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}.$$

On a

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos A+1-\cos B+1-\cos C\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[3-(\cos A+\cos B+\cos C)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3-1-\frac{r}{R}\right] \qquad (203)$$

$$=1-\frac{r}{2R}.$$

**Formule 208.**

$$h_a=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}.$$

Dans le triangle rectangle ACD on a

$$AD = AC \sin C,$$
$$h_a = b\sin C;$$

donc

$$2S = ah_a = ab\sin C.$$

On aurait de même

$$2S = bc\sin A;$$

donc

$$ah_a = bc\sin A,$$

$$h_a=\frac{bc\sin A}{a}.$$

Remplaçons dans cette formule $b$ et $c$ par leurs valeurs $\frac{a\sin B}{\sin A}$ et $\frac{a\sin C}{\sin A}$ tirées de 170 ; on a

$$h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}.$$

**Formule 209.**

$$h_a = \frac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

De la formule 170 on tire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}. \qquad (112)$$

Remplaçons $\frac{a}{\sin A}$ par cette valeur dans la seconde expression de $h_a$ déduite de la formule précédente ; on a

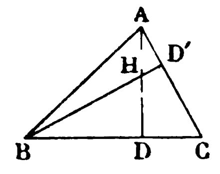
$$h_a = \frac{p \sin B \sin C}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

**Formule 210.**

$$h'_a = 2R \cos A = a \operatorname{cotg} A.$$

Dans le triangle AHD′ on a

$$AH = \frac{AD'}{\cos HAD'} = \frac{AD'}{\sin C},$$




puisque les angles HAD′ et C sont complémentaires.

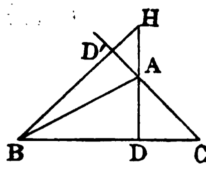
D'autre part, dans le triangle ABD′, on a

$$AD' = AB \cos A = c \cos A;$$

on a donc

$$h'_a = \frac{c \cos A}{\sin C} = 2R \cos A.$$

Nous avons supposé l'angle A aigu; quand il est obtus, la formule ne peut évidemment subsister, puisque cos A est négatif.




Si l'angle A est obtus, on aura encore

$$AH = \frac{AD'}{\sin C};$$

mais dans le triangle ABD', on aura

$$AD' = AB \cos D'AB = AB \cos(\pi - A)$$
$$= -c \cos A,$$

de telle sorte que

$$AH = -2R \cos A.$$

Si l'on suppose alors que $h'_a$ est le nombre algébrique défini au numéro **13**, on voit que dans ce cas $h'_a$ est négatif ; on a alors

$$h'_a = -AH,$$

et par suite

$$h'_a = 2R \cos A.$$

On peut d'ailleurs remarquer que

$$OI = \pm R \cos A ;$$

Si donc $k_a$ est la *coordonnée trilatère* (**12**) du point O, relative au côté BC, on aura dans tous les cas

$$k_a = R \cos A,$$

et, par suite, on en déduit la formule **18**.

A l'aide de la formule **170**, on voit sans peine que

$$2R \cos A = a \operatorname{cotg} A.$$

---

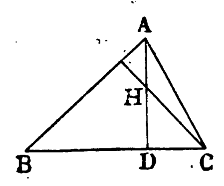
**Formule 211.**

$$h''_a = 2R \cos B \cos C.$$

---

Dans le triangle DHC, on a

$$HD = DC \operatorname{tg} HCD = DC \operatorname{cotg} B,$$




puisque les angles HCD et B sont complémentaires.

D'autre part,

$$DC = AC \cos C = b \cos C ;$$

donc

$$h''_a = b \cos C \operatorname{cotg} B$$
$$= \frac{b \cos C \cos B}{\sin B} = 2R \cos B \cos C.$$

Si l'un des angles B ou C est obtus, cette formule subsiste en y considérant $h''_a$ comme une quantité algébrique représentant l'une des *coordonnées trilatères* (**12**) du point H.

---

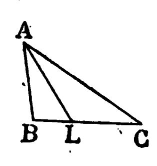
### Formule 212.

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

---

Cette formule peut se déduire immédiatement de la formule **31**, en tenant compte de la valeur de $\cos \frac{A}{2}$ donnée par **175**.

On peut aussi l'obtenir directement en appliquant la relation des sinus au triangle ABL, ce qui donne




$$\frac{AL}{BL} = \frac{\sin B}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Or nous avons vu au numéro **31** que

$$BL = \frac{ac}{b+c}.$$

Donc

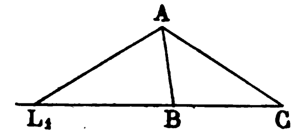
$$AL = \frac{ac \sin B}{(b+c)\sin \frac{A}{2}} = \frac{bc \sin A}{(b+c)\sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

---

**Formule 213.**

$$l_{1a} = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}. \qquad b > c$$

Cette formule se déduit des formules **32** et **174** ; on peut aussi l'obtenir directement.




Appliquons la relation des sinus au triangle $ABL_1$ ; on a

$$\frac{AL_1}{BL_1} = \frac{\sin B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}.$$

Or nous avons vu au numéro **32** que

$$BL_1 = \frac{ac}{b - c}.$$

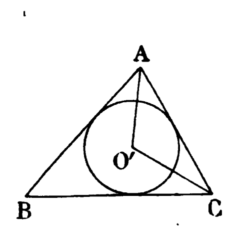
Donc

$$AL_1 = \frac{ac \sin B}{(b - c)\cos \frac{A}{2}} = \frac{bc \sin A}{(b - c)\cos \frac{A}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}.$$

**Formule 214.**

$$l'_a = \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2}.$$

Dans le triangle AO′C on a




$$\frac{AO'}{AC} = \frac{\sin ACO'}{\sin AO'C} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{A + C}{2}\right)},$$

ou

$$\frac{l'_a}{b} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A + C}{2}} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}}.$$

On en déduit

$$l'_a = \frac{b \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}},$$

qu'on peut aussi écrire

$$l'_a = \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2},$$

attendu que d'après la formule **177**, on a

$$c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

---

### Formule 215.

$$l''_a = \frac{abc}{p(b+c)} \cos \frac{A}{2}.$$

---

On a

$$l''_a = l_a - l'_a,$$

ou, en tenant compte de **212** et **215**,

$$l''_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} - \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{p}$$

$$= \frac{bc \cos \frac{A}{2} \left(2p - b - c\right)}{p(b+c)} = \frac{abc \cos \frac{A}{2}}{p(b+c)}.$$

On aurait pu aussi obtenir les valeurs de $l'_a$ et de $l''_a$ en se servant de la relation

$$\frac{l''_a}{r} = \frac{l_a}{h_a} = \frac{l'_a}{h_a - r},$$

établie au numéro **35**.

---

**Formule 216.**

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R(h_a \cos A + h_b \cos B + h_c \cos C).$$

On a vu (**210**) que

$$h'_a = 2R \cos A;$$

le second membre de la formule **216** peut donc s'écrire

$$2(h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c),$$

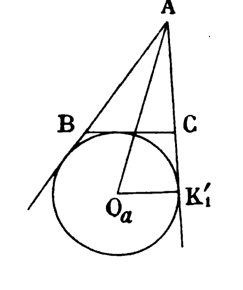
et cette expression est égale à $a^2 + b^2 + c^2$, d'après la formule **13**.

**Formule 217.**

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Dans le triangle rectangle $AO_aK'_1$, on a

$$O_aK'_1 = AK'_1 \operatorname{tg} O_aAK'_1,$$




ou

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

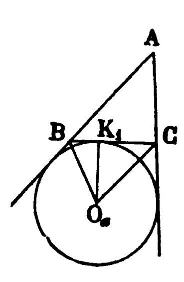
En tirant de cette formule $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ et des formules analogues $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$, et tenant compte de **51**, on obtient la formule **198**.

**Formule 218.**

$$r_a = (p - b) \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = (p - c) \operatorname{cotg} \frac{B}{2}.$$

Dans le triangle $O_aK_1C$ on a

$$O_aK_1 = K_1C \operatorname{tg} O_aCK_1.$$




Or,
$$K_1C = p - b, \tag{51}$$
$$O_aCK_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2};$$
donc
$$r_a = (p - b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$
On aurait de même, en considérant le triangle $O_aK_1B$,
$$r_a = (p - c)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

---

**Formule 219.**

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

---

Les formules 174 et 175 donnent
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},$$
$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$
Multipliant membre à membre, on a
$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{(p-a)r_a^2}{4RS} \tag{38}$$
$$= \frac{r_a}{4R},$$
puisque
$$S = (p-a)r_a.$$
On peut aussi obtenir la formule 219 en multipliant membre à membre la formule 217,
$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

et la formule **200** écrite sous la forme

$$p = 4R \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

d'après **112**.

---

### Formule 220.

$$r_a + r = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

---

Les formules **196** et **219** donnent

$$r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

ajoutons membre à membre, il vient

$$r_a + r = 4R \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right),$$

$$r_a + r = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

---

### Formule 221.

$$r_a - r = 4R \sin^2\frac{A}{2}.$$

---

Les formules **196** et **219** donnent

$$r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

retranchons membre à membre, on a

$$r_a - r = 4R \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 4R \sin^2\frac{A}{2}.$$

---

**Formule 222.**

$$r_a + r_b = 4R \cos^2\frac{C}{2}.$$

---

La formule **219** donne

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b = 4R \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2};$$

ajoutons membre à membre :

$$r_a + r_b = 4R \cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$= 4R \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2} = 4R \cos^2\frac{C}{2}.$$

---

**Formule 223.**

$$r_a - r_b = 4R \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

---

En retranchant les deux relations qu'on a ajoutées dans le numéro précédent, on a

$$r_a - r_b = 4R \cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$= 4R \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

**Formule 224.**

$$a = r_a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right).$$

---

De la formule 218 on tire

$$r_a \operatorname{tg}\frac{B}{2} = p - c,$$

$$r_a \operatorname{tg}\frac{C}{2} = p - b;$$

ajoutons membre à membre, il vient

$$r_a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 2p - b - c = a.$$

---

**Formule 225.**

$$r = \frac{a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

---

Les formules 195 et 177 donnent

$$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$a = p\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

divisons membre à membre, on a

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

**Formule 226.**

$$r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Les formules **217** et **177** donnent

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}};$$

divisant membre à membre, il vient

$$\frac{r_a}{a} = \frac{p \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

**Formule 227.**

$$r_a = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

On peut diviser membre à membre les formules **225** et **226**, ou encore, remarquer que l'on a

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \qquad (217)$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \qquad (195)$$

et diviser membre à membre.

**Formule 228**

$$r_a + r_b + r_c = 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

De la formule **217** on tire

$$r_a + r_b + r_c = p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right),$$

ou, en tenant compte de **198**,

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

formule déjà établie au numéro **51**.

D'autre part, d'après **203**, on peut écrire

$$3R + R(\cos A + \cos B + \cos C) = 3R + R\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$
$$= 4R + r;$$

donc

$$r_a + r_b + r_c = 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

**Formule 229.**

$$r_a r_b r_c = abc \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

De la formule **226** on tire

$$r_a = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$r_b = \frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}},$$

$$r_c = \frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Multiplions membre à membre ; on a

$$r_a r_b r_c = abc \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

---

### Formule 230.

$$r_a r_b r_c \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = p^3.$$

---

La formule **217** donne

$$r_a \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = p, \qquad r_b \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = p, \qquad r_c \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = p.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$r_a r_b r_c \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = p^3.$$

---

### Formule 231.

$$r = \frac{h_a \sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

---

Les formules **195** et **209** donnent

$$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$h_a = \frac{2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}};$$

divisons membre à membre, on a

$$\frac{r}{h_a} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

**Formule 232.**

$$r_a = \frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

---

Les formules 217 et 209 donnent

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$h_a = \frac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}};$$

en divisant membre à membre, il vient

$$\frac{r_a}{h_a} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

---

**Formule 233.**

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{h_a + 2r_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

---

On a

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{a}{p},$$

puisque

$$ah_a = 2pr = 2S.$$

Donc

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{p - a}{p}.$$

Or,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad (176)$$

$$=\frac{p-a}{p}.$$

Donc

$$\frac{h_a-2r}{h_a}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

De même,

$$\frac{h_a}{h_a+2r_a}=\frac{1}{1+\frac{2r_a}{h_a}}=\frac{1}{1+\frac{a}{p-a}}=\frac{p-a}{p}.$$

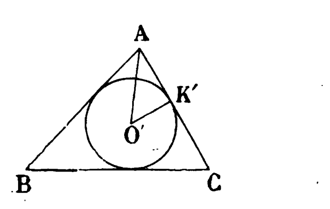
---

**Formule 234.**

$$AO'=\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

---

Dans le triangle rectangle AO′K′ on a




$$AO'=\frac{AK'}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{O'K'}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

---

**Formule 235.**

$$AO'=\frac{p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A}=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

---

Remplaçons dans la formule **234** $r$ par sa valeur tirée de

195, on a

$$AO' = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{p \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

En remplaçant dans cette dernière expression $p$ par sa valeur tirée de 177, on a

$$\frac{p \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}} = \frac{2a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A},$$

et, enfin, comme on a

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \qquad (170)$$

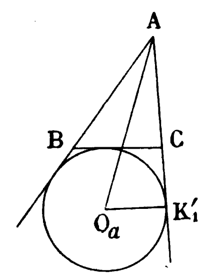
$$\frac{2a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A} = 4R \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

---

**Formule 236.**

$$AO_a = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}}.$$

---




Dans le triangle $AO_aK'_1$ on a

$$AO_a = \frac{AK'_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{O_aK'_1}{\sin\frac{A}{2}}$$

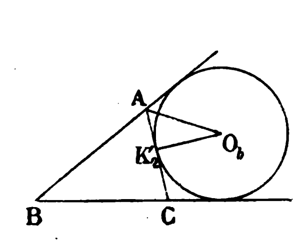
$$= \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}}.$$

### Formule 237.

$$AO_b = \frac{p-c}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Dans le triangle rectangle $AO_bK_2'$, on a

$$AO_b = \frac{AK_2'}{\cos K_2'AO_b} = \frac{O_bK_2'}{\sin K_2'AO_b}.$$




Or, d'après la deuxième remarque du numéro 51,

$$AK_2' = p - c\,;$$

d'ailleurs

$$K_2'AO_b = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

et

$$O_bK_2' = r^b.$$

Donc

$$AO_b = \frac{p-c}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\cos \frac{A}{2}}.$$

---

### Formule 238.

$$O'O_a = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2}.$$

On a

$$O'O_a = AO_a - AO',$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de 234 et 236,

$$O'O_a = \frac{p}{\cos \frac{A}{2}} - \frac{p-a}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}\,;$$

et l'on a aussi

$$\frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2},$$

puisque

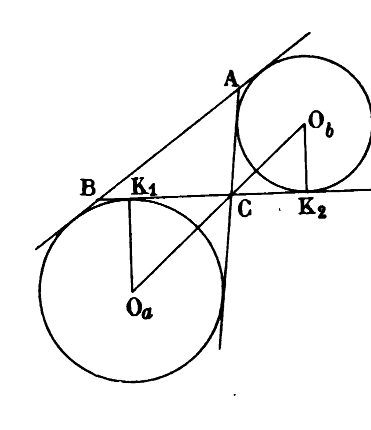
$$a = 2R \sin A. \tag{170}$$

---

**Formule 239.**

$$O_aO_b = \frac{c}{\sin \frac{C}{2}} = 4R \cos \frac{C}{2}.$$

---




Dans les triangles rectangles $CO_bK_2$ et $CO_aK_1$ on a

$$CO_b = \frac{CK_2}{\cos O_bCK_1} = \frac{p-a}{\sin \frac{C}{2}}, \text{ (51)}$$

$$CO_a = \frac{CK_1}{\cos O_bCK_1} = \frac{p-b}{\sin \frac{C}{2}}; \text{ (51)}$$

en ajoutant

$$O_aO_b = \frac{2p - a - b}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{c}{\sin \frac{C}{2}}.$$

---

**Formule 240.**

$$q_bq_c \sin A + q_cq_a \sin B + q_aq_b \sin C = 0.$$

---

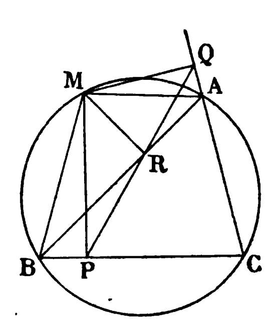
Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Si d'un point* M *de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.*

Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés BC, CA et AB.

Je tire RP et RQ, et je vais montrer que

$$\widehat{QRA} = \widehat{PRB}.$$




Le quadrilatère MRAQ est inscriptible, donc

$$\widehat{QRA} = \widehat{QMA};$$

le quadrilatère MRBP est aussi inscriptible, donc

$$\widehat{PRB} = \widehat{PMB}.$$

Tout revient donc à établir que

$$\widehat{QMA} = \widehat{PMB},$$

ou, en ajoutant à ces deux angles le même angle $\widehat{AMP}$, que

$$\widehat{QMP} = \widehat{AMB}.$$

Or cette égalité résulte de ce que ces deux angles sont supplémentaires de l'angle C.

La droite PRQ est appelée *droite de Simson.*

Il résulte de ce théorème que l'aire du triangle MPQ est égale à la somme des aires des triangles MQR et MPR, ce qu'on peut écrire

$$\text{tr. MPQ} = \text{tr. MQR} + \text{tr. MPR}.$$

Or,

$$\text{tr. MPQ} = \frac{1}{2}\,\text{MP.MQ} \sin \widehat{PMQ} = \frac{1}{2}\,\text{MP.MQ} \sin C,$$

$$\text{tr. MQR} = \frac{1}{2}\,\text{MQ.MR} \sin \widehat{QMR} = \frac{1}{2}\,\text{MQ.MR} \sin A,$$

$$\text{tr. MRP} = \frac{1}{2}\,\text{MR.MP} \sin \widehat{RMP} = \frac{1}{2}\,\text{MR.MP} \sin B.$$

On aura donc

$$\text{MP.MQ} \sin C = \text{MQ.MR} \sin A + \text{MR.MP} \sin B. \qquad (\alpha)$$

Or, d'après les conventions établies, $q_a$, $q_b$, $q_c$ représentent les coordonnées trilatères du point M (voir numéro **12**), c'est-à-dire, par exemple, que $q_a$ est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la mesure de la distance du point M au

côté BC et le signe est le signe + si le point M est par rapport à BC du même côté que le point A, et le signe — dans le cas contraire.

On aura donc ici

$$MP = q_a, \qquad MQ = q_b, \qquad MR = -q_c.$$

La relation ($\alpha$) devient alors

$$q_b q_c \sin A + q_c q_a \sin B + q_a q_b \sin C = 0.$$

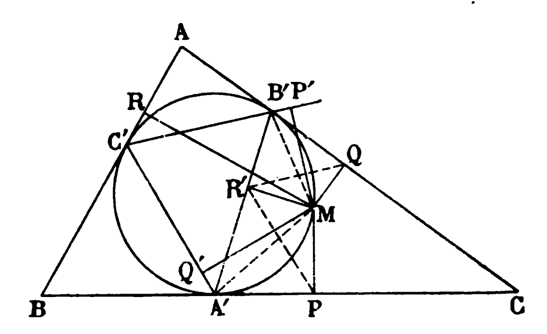
---

**Formule 241.**

$$\sqrt{q'_a} \cos \frac{A}{2} + \sqrt{q'_b} \cos \frac{B}{2} + \sqrt{q'_c} \cos \frac{C}{2} = 0.$$

---

Soit M un point du cercle inscrit au triangle ABC. Abaissons de ce point les perpendiculaires MP, MQ et MR sur les côtés BC, CA et AB. Considérons le triangle formé par les points de contact A', B', C' et abaissons de M les perpendiculaires MP', MQ' et MR' sur les côtés B'C', C'A' et A'B'.




Nous avons démontré dans le numéro précédent la relation

$$MP' . MQ' \sin C' = MQ' . MR' \sin A' + MR' . MP' \sin B' ; \qquad (\alpha)$$

A', B' et C' désignant les angles du triangle A'B'C' et en supposant que le point M soit sur l'arc A'B'.

Je dis que l'on a

$$\overline{MR'}^2 = MP \times MQ.$$

En effet, les quadrilatères MR'B'Q et MR'A'P étant inscriptibles, on a

$$\widehat{QR'M} = \widehat{QB'M},$$
$$\widehat{MPR'} = \widehat{MA'R'}.$$

Or,

$$\widehat{QB'M} = MA'R',$$

comme ayant même mesure ; donc

$$\widehat{QR'M} = \widehat{MPR'} ;$$

de plus, les deux angles QMR' et PMR' sont égaux comme suppléments des angles CB'A' et CA'B' qui sont égaux ; les deux triangles QMR' et PMR' sont semblables, et l'on a

$$\frac{MR'}{MP} = \frac{MQ}{MR'},$$

d'où

$$\overline{MR'}^2 = MP \times MQ = q'_a q'_b.$$

On en déduit

$$MR' = \sqrt{q'_a q'_b}.$$

On aura de même

$$MP' = \sqrt{q'_b q'_c},$$
$$MQ' = \sqrt{q'_c q'_a}.$$

En remplaçant dans la relation ($\alpha$), il vient

$$q'_c\sqrt{q'_a q'_b}\sin C' = q'_a\sqrt{q'_b q'_c}\sin A' + q'_b\sqrt{q'_c q'_a}\sin B' ;$$

ou, en divisant par $\sqrt{q'_a q'_b q'_c}$,

$$\sqrt{q'_c}\sin C' = \sqrt{q'_a}\sin A' + \sqrt{q'_b}\sin B'.$$

Or l'angle A' est égal à l'angle AB'C' comme ayant même mesure ; donc

$$A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

et

$$B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},$$

$$C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} ;$$

la relation devient

$$\sqrt{q'_a}\cos\frac{A}{2} + \sqrt{q'_b}\cos\frac{B}{2} - \sqrt{q'_c}\cos\frac{C}{2} = 0.$$

Si le point M est sur l'arc A'C', on aura

$$\sqrt{q'_a}\cos\frac{A}{2}-\sqrt{q'_b}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{q'_c}\cos\frac{C}{2}=0,$$

et enfin, si le point M est sur l'arc B'C', on aura

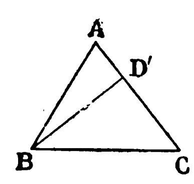
$$-\sqrt{q'_a}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{q'_b}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{q'_c}\cos\frac{C}{2}=0.$$

On peut donc conserver la formule **241**, à condition d'affecter du signe — l'un des radicaux.

---

**Formule 242.**

$$S=\frac{bc\sin A}{2}.$$




Dans le triangle ABC on a

$$2S = AC \times BD' = b \times BD'.$$

Or, dans le triangle rectangle ABD', on a

$$BD' = AB \sin A = c \sin A\ ;$$

donc

$$2S = bc \sin A.$$

---

**Formule 243.**

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

De la formule **170** on tire

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}\ ;$$

en remplaçant $b$ et $c$ par ces valeurs dans la formule **242**, on a le résultat demandé.

### Formule 244.

$$S = \frac{abc^2 \sin(A - B)}{2(a^2 - b^2)}.$$

On a

$$a \sin B = b \sin A, \tag{170}$$

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A,$$

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A),$$

d'où

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

$$= (a \cos B + b \cos A)(a \cos B - b \cos A)$$

$$= c.2R(\sin A \cos B - \sin B \cos A) \tag{171}$$

$$= 2Rc \sin(A - B).$$

On en déduit

$$\frac{\sin(A - B)}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2Rc} = \frac{2S}{abc^2}; \tag{7}$$

d'où

$$S = \frac{abc^2 \sin(A - B)}{2(a^2 - b^2)}.$$

### Formule 245.

$$S = \frac{(a^2 - b^2) \sin A \sin B}{2 \sin(A - B)} = \frac{a^2 - b^2}{2(\text{cotg } A - \text{cotg } B)}.$$

Nous avons établi au numéro précédent

$$\frac{a^2 - b^2}{\sin(A - B)} = 2Rc;$$

donc

$$\frac{(a^2 - b^2) \sin A \sin B}{2 \sin(A - B)} = Rc \sin A \sin B$$

$$= Rc.\frac{ab}{4R^2} = \frac{abc}{4R} = S.$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2(\cot A - \cot B)};$$

on peut l'obtenir sous cette forme par un autre procédé. On a, en effet,

$$2S = bc \sin A,$$

ou

$$4S \cot A = 2bc \cos A.$$

La formule **172** peut alors s'écrire

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot A,$$

de même

$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S \cot B;$$

retranchant membre à membre, il vient

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 4S(\cot A - \cot B),$$

ou

$$a^2 - b^2 = 2S(\cot A - \cot B),$$

d'où l'on tire la formule demandée.

---

### Formule 246.

$$S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \operatorname{tg} \frac{A+B-C}{2}}.$$

---

On a

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C, \qquad (172)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A+B-C}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \cot C,$$

d'où

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{\operatorname{tg} \frac{A+B-C}{2}} = 2ab \sin C = 4S.$$

---

**Formule 247.**

$$S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C}.$$

On a

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A, \qquad S = \frac{1}{2} ca \sin B, \qquad S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Multipliant membre à membre et extrayant la racine cubique, on a la formule demandée

---

**Formule 248.**

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

On a $\quad S = pr, \quad (4)$

et $\quad r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}; \quad (195)$

en remplaçant $r$ par sa valeur, il vient

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

---

**Formule 249.**

$$S = \frac{abc}{p} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

On a

$$\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}\left(\sin A + \sin B + \sin C\right), \quad (112)$$

$$= \frac{p}{4R}; \quad (200)$$

par suite,

$$\frac{abc}{p} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} = \frac{abc}{4R} = S.$$

### Formule 250.

$$S = \sqrt{abcp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

De 196 on tire

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R},$$

d'où

$$abcp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{abc}{4R} \cdot pr = S^2.$$

### Formule 251.

$$S = \frac{p^2}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}}$$

On a

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \qquad (149)$$

$$= \frac{p}{r}; \qquad (197)$$

par suite,

$$\frac{p^2}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}} = \frac{p^2 r}{p} = pr = S.$$

### Formule 252.

$$S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)}.$$

Dans le numéro 245 nous avons établi les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{cotg} A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S \operatorname{cotg} B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S \operatorname{cotg} C;$$

ajoutons membre à membre, il vient

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4S(\cot A + \cot B + \cot C);$$

d'où

$$S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\cot A + \cot B + \cot C)}.$$

---

**Formule 253.**

$$S = \frac{a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A}{4}.$$

---

On a

$$\frac{a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A}{4} = \frac{a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A}{2}$$

$$= \frac{a^2 b \cos B + b^2 a \cos A}{4R}$$

$$= \frac{ab(a \cos B + b \cos A)}{4R} = \frac{abc}{4R} = S.$$

---

**Formule 254.**

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

---

La formule **202** donne

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2};$$

donc $$2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr = S.$$

---

**Formule 255.**

$$S = Ra \sin B \sin C.$$

---

Cette formule s'obtient en remplaçant dans la formule précédente $2R \sin A$ par $a$.

**Formule 256.**

$$S = 4Rp \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

La formule 196 donne

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R};$$

on en déduit

$$4Rp \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4Rp\frac{r}{4R} = pr = S.$$

**Formule 257.**

$$S = \frac{R}{2}\left(a\cos A + b\cos B + c\cos C\right).$$

La formule 192 donne

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C;$$

donc

$$\frac{R}{2}\left(a\cos A + b\cos B + c\cos C\right) = 2R^2\sin A\sin B\sin C = S,$$

d'après la formule 254.

**Formule 258.**

$$S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C).$$

De la formule 200, on tire

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R},$$

d'où

$$Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = pr = S.$$

**Formule 259.**

$$S = \frac{2}{3} R^2 [\sin^3 A \cos(B - C) + \sin^3 B \cos(C - A) + \sin^3 C \cos(A - B)].$$

---

D'après la formule 169, le second membre peut s'écrire

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

et cette expression est égale à S d'après la formule 254.

---

**Formule 260.**

$$S = R h_a \sin A.$$

---

On a

$$S = \frac{a h_a}{2},$$

et

$$a = 2R \sin A\,;$$

en multipliant membre à membre, il vient

$$S = R h_a \sin A.$$

---

**Formule 261.**

$$S = \frac{1}{8R} \left( a^2 h'_a \operatorname{coséc} A + b^2 h'_b \operatorname{coséc} B + c^2 h'_c \operatorname{coséc} C \right).$$

---

La formule 210 donne

$$h'_a = 2R \cos A\,;$$

par suite,

$$a^2 h'_a \operatorname{coséc} A = a^2 . 2R \cos A . \frac{1}{\sin A} = a^2 . 2R \cos A . \frac{2R}{a} = 4R^2 a \cos A\,;$$

de même, on obtient

$$b^2 h'_b \operatorname{coséc} B = 4R^2 b \cos B,$$

$$c^2 h'_c \operatorname{coséc} C = 4R^2 c \cos C.$$

En ajoutant, on a

$$a^2 h'_a \operatorname{coséc} A + b^2 h'_b \operatorname{coséc} B + c^2 h'_c \operatorname{coséc} C$$

$$= 4R^2 (a \cos A + b \cos B + c \cos C),$$

ou, en tenant compte de **257**,

$$a^2h'_a \text{ coséc A} + b^2h'_b \text{ coséc B} + c^2h'_c \text{ coséc C} = 8\text{RS},$$

d'où l'on tire la formule demandée.

---

### Formule 262.

$$S = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3(\text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C})}.$$

---

La formule **29** donne

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right);$$

par suite, le second membre de la formule à établir est égal à

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C})},$$

expression qui est égale à S en vertu de **252**.

---

### Formule 263.

$$S = \frac{2}{3}\left(m_b^2 - m_a^2\right)\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}.$$

---

De la formule **28** on tire

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4};$$

en retranchant membre à membre, il vient

$$m_b^2 - m_a^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{4} = \frac{3(a^2 - b^2)}{4}.$$

On tire de là $a^2 - b^2$, et en remplaçant dans la formule **245**, on a

$$S = \frac{2}{3}\left(m_b^2 - m_a^2\right)\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}.$$

**Formule 264.**

$$S = \frac{1}{2} l_a (b + c) \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} l_a a \cos \frac{B - C}{2}.$$

---

En tenant compte de la formule **212**, on a

$$\frac{1}{2} l_a (b + c) \sin \frac{A}{2} = bc \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A = S.$$

La deuxième expression de S se déduit de la première à l'aide de la formule **178**.

---

**Formule 265.**

$$S = \frac{1}{2} l_{1a} (b - c) \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} l_{1a} a \sin \frac{B - C}{2}. \qquad b > c$$

---

En tirant $l_{1a}$ de la formule **213** et remplaçant, on a

$$\frac{1}{2} l_{1a} (b - c) \cos \frac{A}{2} = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

La deuxième expression de S se déduit de la première à l'aide de la formule **179**.

---

**Formule 266.**

$$S = r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

---

De la formule **195** on tire

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r},$$

d'où

$$r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = pr = S.$$

---

### Formule 267.

$$S = r_a^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

---

De la formule 227 on tire

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{r_a},$$

d'où

$$r_a^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = r r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = rp, \qquad (217)$$

ou

$$r_a^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = S.$$

On peut aussi établir cette formule en remplaçant $r_a$ et les tangentes des demi-angles par leurs valeurs en fonction des côtés, tirées des formules 38 et 176.

---

### Formule 268.

$$S = r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + 2Rr \sin A.$$

---

Remplaçons $r \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$ par sa valeur $p - a$ tirée de 234, et $2R \sin A$ par sa valeur $a$ tirée de 170 ; on a

$$S = r(p - a) + ar = (p - a + a)r = pr = S.$$

---

### Formule 269.

$$S = r r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

---

La formule 217 donne

$$r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = p;$$

par suite,

$$rr_a \cot g \frac{A}{2} = pr = S.$$

---

**Formule 270.**

$$S = r_b r_c \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

---

De la formule **226** on tire

$$r_b = \frac{b \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}},$$

$$r_c = \frac{c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}};$$

en multipliant membre à membre, il vient

$$r_b r_c = bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

et

$$r_b r_c \operatorname{tg} \frac{A}{2} = bc \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A = S.$$

---

**Formule 271.**

$$S = \frac{r^2 (\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2 \sin A \sin B \sin C}.$$

---

En tenant compte des formules **200** et **202**, on a

$$\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{\frac{p^2}{R^2}}{\frac{pr}{2R^2}} = \frac{2p}{r};$$

par suite,

$$\frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2 \sin A \sin B \sin C} = pr = S.$$

---

**Formule 272.**

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2r.O_bO_c.O_cO_a.O_aO_b. \sin A \sin B \sin C}.$$

Dans la quantité sous le radical remplaçons le produit $O_bO_c.O_cO_a.O_aO_b$ par sa valeur $16R^2p$ tirée de **83**, et le produit $\sin A \sin B \sin C$ par sa valeur $\frac{pr}{2R^2}$ tirée de **202** ; on a

$$2r.O_bO_c.O_cO_a.O_aO_b \sin A \sin B \sin C = 2r.16R^2p \cdot \frac{pr}{2R^2} = 16p^2r^2,$$

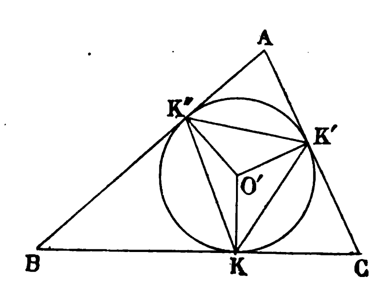
en extrayant la racine carrée des deux membres, et en remarquant que $pr = S$, on a la formule demandée.

---

**Formule 273.**

$$S = \frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right)}.$$

Traçons le cercle inscrit qui touche les côtés du triangle aux points K, K′, K″ ; joignons le point O′ à ces points, nous décomposons ainsi le triangle en la somme de six triangles, dont nous allons évaluer la surface, en appliquant la formule **242** à ces triangles.




$$\text{Aire } AK'K'' = \frac{1}{2}AK'.AK'' \sin A$$

$$= \frac{1}{2}(p-a)^2 \sin A,$$

et de même pour les triangles BK″K et CKK′.

D'autre part,

$$\text{aire O'K'K''} = \frac{1}{2}\,\text{O'K'}.\text{O'K''}\sin \text{K'O'K''} = \frac{1}{2}\,r^2 \sin A,$$

puisque le quadrilatère O′K′AK″ est inscriptible.

On a des formules analogues pour les deux autres triangles qui ont leurs sommets au point O′.

On peut donc écrire

$$2S=(p-a)^2\sin A+(p-b)^2\sin B+(p-c)^2\sin C+r^2(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Or, d'après la formule **200**,

$$r^2(\sin A + \sin B + \sin C) = r^2 \cdot \frac{p}{R} = \frac{Sr}{R};$$

en remplaçant, on a

$$2S = (p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C + \frac{Sr}{R},$$

ou

$$2S\left(1 - \frac{r}{2R}\right) = (p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C,$$

et en observant que le coefficient de 2S d'après la formule **207** est égal à $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$, on a

$$S = \frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right)}.$$

# LANGUES VIVANTES

## *" SPRICH DEUTSCH "*. Gesprächs- und Lesestoffe

*Ein Hülfsmittel zur Erlernung der deutschen Umgamgssprache, nach dem neuen Lehrplan verfaßt*, von Georg STIER, Sprachlehrer, und E.-B. LANG, Professor am Gymnasium Janson-de-Sailly und an der Militärschule zu Saint-Cyr. — Vol. 18/12^cm cart. toile :

I. — **Erste Stufe, für die Sexta** . . . . . . . . . 1 fr. 25
II. — **Zweite Stufe, für die Quinta** . . . . . . . . . 1 fr. 25
III. — **Dritte Stufe, für Quarta u. Tertia** . . . . . . . 1 fr. 50

## *" SPEAK ENGLISH "*. Little Chats

*A help to learn conversational English, drawn up after the new method of teaching*, by A.-A. LIÉGAUX-WOOD and E.-B. LANG, Professors of Languages at Janson-de-Sailly, University of Paris.

I. — **1^st Degree, for the 6^th Form** . . . . . . . . . 1 fr. 25
II. — **2^nd Degree, for the 5^th Form** . . . . . . . . 1 fr. 25
III. — **3^rd Degree, for the 4^th and 3^rd Form** . . . (*Sous presse.*)

---

*Les Cinq Langues* Journal-Revue d'enseignement des langues **Allemande, Anglaise, Espagnole, Française et Italienne**), s'adaptant à toutes les méthodes ; à l'usage des élèves de tous les établissements d'instruction et des personnes qui désirent se perfectionner dans l'étude des langues étrangères.

Revue bi-mensuelle de 40 pages illustrée, format 25/16^cm.

Rédacteur en chef : **E.-Henry Bloch**, agrégé de l'Université, professeur au lycée Voltaire.

Tarif des abonnements :

| *Abonnements à* . . . | 1 langue | 2 langues | 3 langues | 5 langues |
|---|---|---|---|---|
| France . . . . . . . | 3^fr,50 | 5^fr » | 6^fr,50 | 8^fr » |
| Étranger . . . . . . | 4^fr,50 | 6^fr » | 7^fr,50 | 10^fr » |

---

**PETIT TRAITÉ MATHÉMATIQUE ET PRATIQUE**

# DES OPÉRATIONS COMMERCIALES
## ET FINANCIÈRES

**I. *Arithmétique commerciale et financière*. — II. *Algèbre financière***, par M. J. PAROC, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée Carnot, à Tunis.

Tome I : ***Arithmétique commerciale et financière***, volume de 22/14^cm, de 400 pages avec figures dans le texte. . **4 fr. 50**

Tome II : ***Algèbre financière*** . . . . . . . . . (***En préparation.***)

**Algèbre**, à l'usage des candidats à l'École Centrale, par P. APPELL, membre de l'Institut et A. GRÉVY, professeur agrégé (cours de Centrale) au lycée Saint-Louis. — Un vol. 22/14cm.
*(En préparation.)*

**Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analytique**, par A. MACÉ DE LÉPINAY, professeur agrégé au lycée Henri IV, *4e édition.* — Un vol. 22/14cm . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 fr. 50

**Cours d'Arithmétique**, à l'usage des candidats au baccalauréat et aux écoles, par A. TARTINVILLE. — Un vol. 22/14cm, 3e édition . . . 5 fr. »

**Théorie des équations et des inéquations** (théorie du second degré) par A. TARTINVILLE. — Vol. 25/16cm, 2e édition . . . . . . . . 3 fr. 50

**Géométrie analytique (Eléments de)**, par E. DESSENON, professeur agrégé au lycée Saint-Louis. — Un volume 22/14cm, 2e édition. 7 fr. 50

**Résumé de Géométrie analytique** *à deux et à trois dimensions*, par A. RÉMOND. — Un volume 22/14cm, 2e édition. . . . . . . . . 4 fr. »

**Cours de Géométrie descriptive**, à l'usage des candidats aux écoles Centrale, Polytechnique, des Ponts, des Mines, par X. ANTOMARI, docteur ès sciences, professeur agrégé au lycée Carnot. — Un volume 25/16cm avec épures dans le texte, 2e édition, augmentée. . . . . . . 10 fr. »

**Mécanique (Leçons de)**, à l'usage des candidats à l'Ecole Centrale, par X. ANTOMARI, professeur agrégé au Lycée Carnot, et E. HUMBERT, professeur agrégé au lycée Louis-le-Grand.— Un volume 22/14cm. . . 5 fr. »

**Leçons de Statique**, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par E. CARVALLO, docteur ès sciences.— Un vol. 22/14cm, 2e édit. 2 fr. »

**Approximations numériques.** Théorie et pratique des Calculs approchés, à l'usage des candidats aux écoles Navale et Centrale, par J. GRIESS professeur agrégé au lycée Charlemagne.—Vol. 22/14cm de 64 p. 1 fr. »

**Notions complémentaires sur les Courbes usuelles**, par P. BARBARIN, professeur agrégé au lycée de Bordeaux. — Brochure 22/14cm avec 24 fig . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 0 fr. 75

---

**Problèmes de Géométrie analytique** *à deux et à trois dimensions*, par E. MOSNAT, professeur agrégé au collège Rollin. — Tome I, 6 fr. chacun des tomes II et III . . . . . . . . . . . . . . . . 7 fr. »

**Questions d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux écoles Polytechnique, Normale, Centrale, etc., par G. MAUPIN.— Un vol.25/16cm . . . 5 fr. »

**Les Exercices d'Algèbre**, du même auteur, à l'usage des élèves de 1re année de Mathématiques spéciales, se vendent 2 fr.

**Problèmes et Épures de Géométrie descriptive**, par N. CHARRUIT.— 1re *Partie*. Vol. 25/16cm, 2e édition avec épures dans le texte. 5 fr. »

**Recueil de calculs logarithmiques**, à l'usage des candidats aux écoles du Gouvernement, par P. BARBARIN. — Un vol. 28/22cm . . . . 3 fr. 50

**Problèmes de baccalauréat**, par H. VUIBERT et E. BOUANT, 3e édit. :
I. *Mathématiques*, par H. VUIBERT. — Vol. 22/14cm. . . . . . 5 fr. »
II. *Physique et Chimie*, par E. BOUANT. — Vol. 22/14cm . . . . 3 fr. »

**Programmes** pour tous les examens, tous les concours, toutes les écoles. (Consulter le *Catalogue* ou l'*Annuaire de la Jeunesse*.)

**Exécution des épures et lavis (Instructions et conseils)**, 7e édition avec 28 figures dans le texte. . . . . . . . . . . . . 1 fr. »

Cette brochure, écrite par une sommité de l'enseignement du dessin, rendra les plus grands services aux jeunes gens qui apprennent le dessin graphique; elle est indispensable à ceux qui se destinent aux écoles spéciales.

**Tracé des Ombres**, à l'usage des candidats à l'Ecole Centrale, par J. GEFFROY, répétiteur à l'École Centrale. — Un vol. 25/16cm avec 97 figures ou épures dans le texte. . . . . . . . . . . . . . . . . 3 fr. 50

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

**Librairie VUIBERT et NONY, 63, boul[d] S[t]-Germain, Paris, 5[e].**

# *Ouvrages de Mathématiques conformes aux nouveaux programmes de l'enseignement secondaire.*

## Éléments de Mathématiques (*Classes littéraires*), par A. Grévy.

(Volumes 18/12, cartonnés toile) :

**Eléments d'Arithmétique** : classe de 3e A. . . . . . . . . 1 fr. 75
**Eléments d'Arithmétique et Notions d'Algèbre** : cl. de 3e A. 2 fr. »
**Eléments d'Algèbre** : classes de 3e A et 1re A et B. . . 1 fr. 75
**Eléments de Géométrie** : classes de 4e et 3e A. . . . . . 1 fr. 50
— — classes de 2e et 1re A et B . . . 1 fr. 25
Les deux parties réunies en un seul volume. . . 2 fr. 25
**Eléments de Cosmographie** : classes de Première A et B, par A. Grignon. — Joli volume illustré, avec 12 planches hors texte et carte céleste. (*Sous presse.*)

## Cours de Mathématiques (*Classes scientifiques*), par A. Grévy :

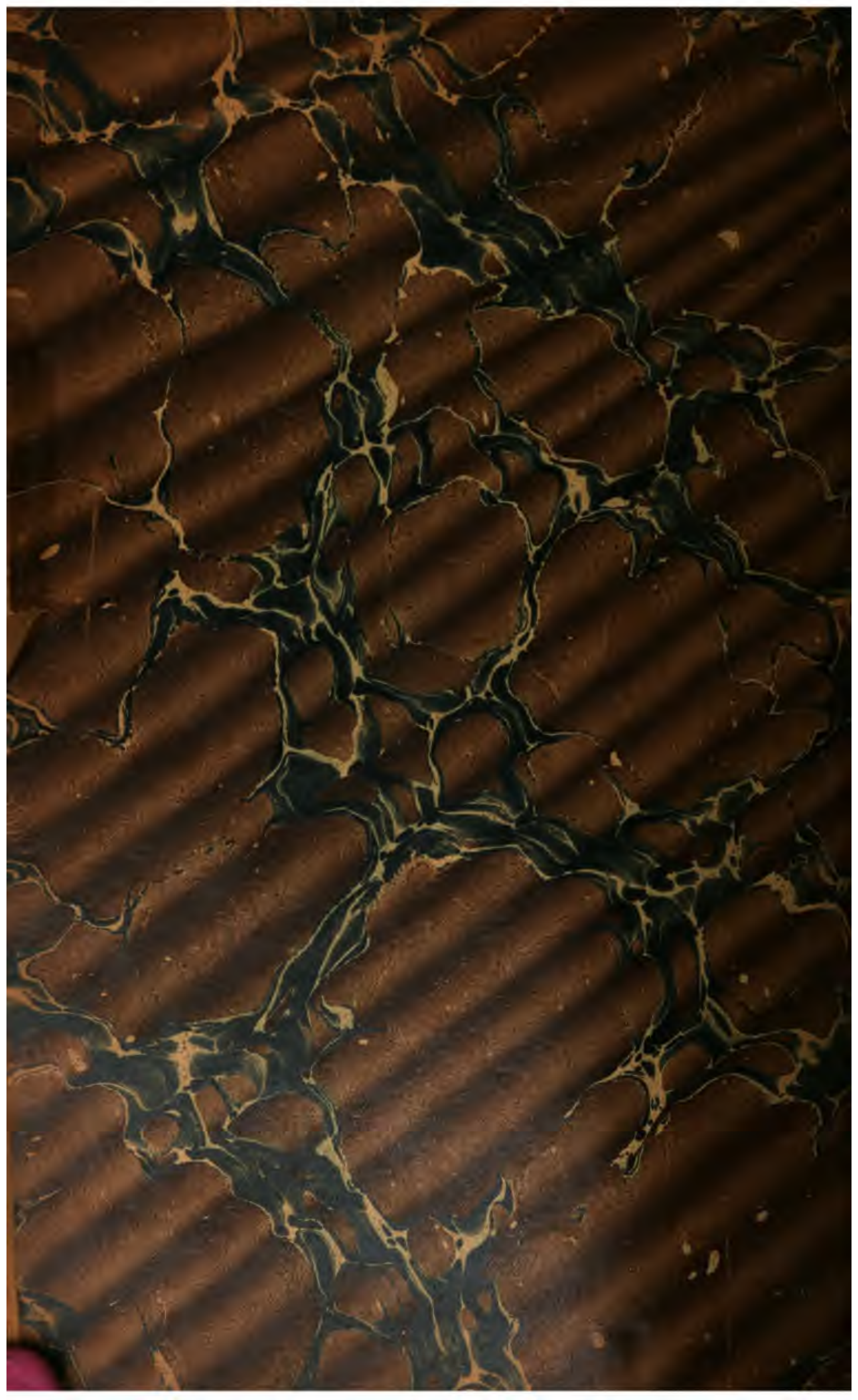
**Arithmétique** : classe de 4e B. . . . . . . . . . . . . 1 fr. 75
**Algèbre** : classes de 4e B à 1re C et D. . . . . . . . . 2 fr. 50
— classes de Mathématiques A et B. . . . (*Sous presse.*)
**Géométrie** : classes de 5e à 3e B . . . . . . . . . . 2 fr. 25
— classes de 2e et 1re D . . . . . . . . . . . 1 fr. 25
Les deux parties réunies en un volume. . . . . 3 fr. »
**Géométrie** : classes de 2e et 1re C. . . . . . . . . . . 1 fr. 50
**Trigonométrie** : cl. de 2e et 1re C et D et Mathém. A et B. 2 fr. 50

**Traité de Cosmographie**, par A. Grignon. — 2 vol. 22/14cm :
I. Classes de Première C et D . . . . . . . . (*Sous presse.*)
II. Classes de Mathématiques A et B. . . . (*En préparation.*)
**Traité de Mécanique**, par C. Guichard, professeur à l'Université de Clermont. — 2 vol. 22/14cm :
I. *Cinématique* : Classes de 1re C et D . . . . . . . 1 fr. 50
II. *Cinématique, Statique et Dynamique* : classes de Mathématiques A et B. . . . . . . . . . . . (*Sous presse.*)
**Traité de Géométrie descriptive**, par T. Chollet, professeur agrégé au lycée d'Orléans. — 2 vol. 22/14cm avec épures dans le texte :
*Première partie* : cl. de 1re C et D. . . . . . . . . . 2 fr. »
*Deuxième partie* : cl. de Mathématiques A et B. (*Sous presse.*)

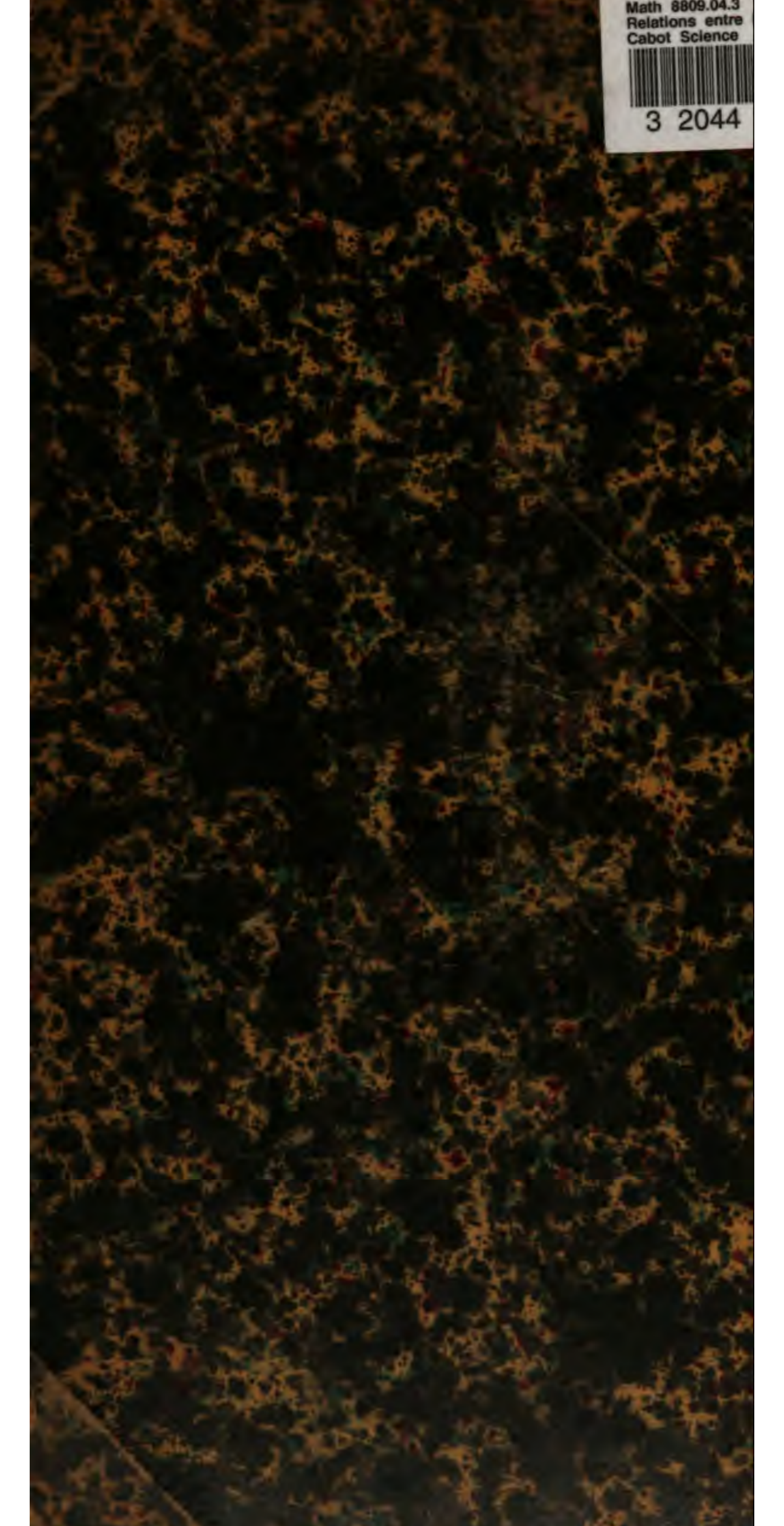
**Formulaire** (Mathématiques, Physique, Chimie), 9e édition. — Un vol. format de poche, avec pages blanches pour notes, br. 1 fr. »
cart. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 fr. 50
**Formulaire** (Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique), à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. — Un vol. 22/12cm cart. toile, avec pages blanches pour notes, broché, 2 fr.; cart. 2 fr. 50
**Problèmes de Baccalauréat.** — Vol. 22/14cm :
*Mathématiques*, par Vuibert, 3e édition. . . . . . . 5 fr. »
*Physique et Chimie*, par E. Bouant, 4e édition. . . . 3 fr. »

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.








Math 8809.04.3
Relations entre
Cabot Science
3 2044